Sapienza, Università di Roma
Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"

Note di base di

Analisi Matematica

versione 1.2 (7 ottobre 2015)

Lamberto LAMBERTI
Corrado MASCIA

Indice

CAPITOLO 1

I numeri reali

L'Analisi Matematica classica si basa sull'uso dei *numeri reali* ed ogni testo, nota, appunto che intenda presentare le prime nozioni di questa disciplina non può che iniziare dalla presentazione di tale insieme numerico. Nel corso dei secoli, la comprensione e la definizione del fondamento logico dell'insieme dei numeri reali, indicato con il simbolo $\mathbb{R}$, si è andata precisando e, attualmente, siamo in possesso di varie versioni assiomatiche, equivalenti tra loro, che definiscono in maniera formalmente inequivocabile l'oggetto numerico con cui lavoreremo. Partire dall'assiomatica, però, è una scelta didattica molto discutibile perché rischia di far perdere l'idea intuitiva su cui si basa la costruzione logico-formale. Per questo motivo, in questo Capitolo, viene presentato il concetto di numero reale in maniera "intuitivamente convincente" a partire dall'idea dell'associazione di un numero ad ogni punto di una retta di riferimento. Verranno richiamate le proprietà fondamentali dell'insieme dei numeri reali: operazioni di somma e moltiplicazione, ordinamento, struttura metrica. Successivamente, verrà dato qualche cenno agli assiomi necessari per definire in maniera rigorosa cosa sia la struttura di cui stiamo parlando, scegliendo, tra i vari punti di partenza possibili, quello che si basa sull'*assioma degli intervalli incapsulati* e sulla *proprietà di Archimede*. Per concludere, verranno introdotte le definizioni di massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore di un insieme di numeri reali, enunciando il risultato di esistenza degli estremo superiore ed inferiore, che è un punto cardine di tutto il materiale che sarà presentato nelle pagine a venire.

1. Numeri naturali, interi e razionali

Il percorso classico che porta alla definizione dell'insieme $\mathbb{R}$ comincia dai numeri *naturali* $\mathbb{N}$, passa per gli *interi* $\mathbb{Z}$, si sofferma sui *razionali* $\mathbb{Q}$, ed arriva, infine, ai *reali* $\mathbb{R}$. Un ulteriore passo in avanti conduce ai *numeri complessi* $\mathbb{C}$ che, per ora, non verranno introdotti.

Numeri naturali, $\mathbb{N}$. I numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ nascono da uno dei problemi primordiali dell'uomo (specie se insonne): il "conteggio". In tale insieme sono definite le operazioni di addizione $+$ e moltiplicazione $\cdot$, per cui valgono sia le *leggi commutative* che quelle *associative*: per ogni terna di numeri x, y, z,

$$x + y = y + x, \qquad (x + y) + z = x + (y + z)$$
$$x \cdot y = y \cdot x, \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Con la scelta di considerare lo zero 0 un numero naturale (scelta non condivisa da tutti), in $\mathbb{N}$ sono presenti gli *elementi neutri* rispetto alla somma e rispetto al prodotto: per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, $y \neq 0$,

$$x + 0 = x, \qquad x \cdot 1 = x$$

Infine, vale anche la *legge distributiva*: per ogni terna di numeri x, y, z,

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,$$

che descrive la relazione tra le due operazioni.

I numeri naturali hanno due difetti fondamentali, che costringono, in qualche modo, a guardare più in là, cercando nuovi insiemi di numeri.

1. *Difetto "algebrico".* Le operazioni inverse, sottrazione e divisione, non sono sempre possibili nell'insieme dei numeri naturali: non è possibile sottrarre 2 da 1 o dividere 1 con 2 e ottenere un numero naturale. La soluzione "alla Salomone" (cioè dividere in due metà) nei naturali non è sempre praticabile: nel caso di un numero dispari, il concetto di "metà" non è rappresentato da nessun numero naturale.

2. *Difetto "metrico".* Il secondo problema è collegato alla questione della *misura*. Il procedimento della misurazione si basa su due passi:
– scegliere un'unità di misura (ad esempio, il metro campione);
– contare il numero di copie del campione che ricoprono l'oggetto da misurare.

Nella maggior parte dei casi, la lunghezza del segmento da misurare non è pari ad multiplo <u>intero</u> del segmento unitario. Come fare? L'opzione di dividere in sottosegmenti il segmento unitario richiede il concetto di frazione, cioè di numero razionale e non è quindi praticabile nell'ambito naturale. Vedremo tra breve che bisognerà prendere atto della realtà delle cose: l'essere razionali non basta...

Numeri interi relativi. Per rendere possibili senza restrizioni le operazioni di sottrazione, si estende il concetto degli interi "negativi", ottenendo l'insieme dei numeri interi relativi (o semplicemente interi):

$$\text{numeri interi:} \qquad \mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots\}$$

L'insieme $\mathbb{Z}$ è una estensione insiemistica di $\mathbb{N}$, nel senso che contiene l'insieme dei numeri naturali, ed inoltre è possibile definire l'operazione di somma in $\mathbb{Z}$ in modo che valgano le stesse proprietà che valevano in $\mathbb{N}$. C'è anche qualcosa in più: grazie all'introduzione dei numeri negativi, oltre a sommare, è sempre possibile sottrarre. In maniera più precisa, possiamo affermare che ogni elemento di $\mathbb{Z}$ ha un *elemento inverso* rispetto all'operazione di somma:

$$\forall\, k \in \mathbb{Z} \qquad \exists\, h \in \mathbb{Z} \qquad \text{tale che} \qquad k + h = 0.$$

Il numero h è quello che si ottiene cambiando di segno k, cioè $h = -k$. La presenza in $\mathbb{Z}$ di un'operazione di somma per cui vale la proprietà commutativa, l'esistenza di 0 e l'esistenza dell'elemento inverso, fanno di $\mathbb{Z}$ un gruppo commutativo (o gruppo abeliano).

Numeri razionali. Non abbiamo ancora risolto completamente il difetto "algebrico" di $\mathbb{N}$, dato che anche nell'insieme $\mathbb{Z}$ non è sempre possibile dividere. Per questo motivo, introduciamo un terzo insieme di numeri: l'insieme dei numeri razionali, cioè numeri che sono rapporto di numeri interi

$$\text{numeri razionali:} \quad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ q \neq 0 \right\}.$$

Attenzione! I numeri razionali possono essere scritti in molti modi diversi: ad esempio,

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{142}{71} = \dots$$

In genere si preferisce avere un'unica rappresentazione del numero e, per questo, si richiede che q sia positivo e che p e q abbiano massimo comune divisore pari a 1. Ci si riconduce sempre ad un'espressione di questo genere attraverso la "semplificazione" dei fattori comuni.

Per costruzione valgono le inclusioni insiemistiche

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Inoltre, nell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono ben definite tutte le *operazioni razionali*, cioè addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione, eccetto la divisione per zero. La maniera precisa di formulare il fatto che sia possibile "dividere per un qualsiasi numero razionale non nullo" consiste nell'affermare che ogni elemento di $\mathbb{Q}$, tranne 0, ha un *elemento inverso* rispetto all'operazione di prodotto:

$$\forall\, x \in \mathbb{Q},\, x \neq 0 \qquad \exists\, y \in \mathbb{Q} \qquad \text{tale che} \qquad x \cdot y = 1.$$

L'elemento y si indica con $\dfrac{1}{x}$ oppure con x^{-1}. Restano valide le stesse proprietà indicate in precedenza sia per la somma che per la moltiplicazione.

La presenza di somma e prodotto (e relative proprietà) fa di $\mathbb{Q}$ un campo.

Come conseguenza delle proprietà delle operazioni di somma e prodotto, nell'insieme $\mathbb{Q}$ vale la legge di annullamento del prodotto:

$$a \cdot b = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 0 \;\text{ oppure }\; b = 0.$$

Infatti, se $a \neq 0$, allora moltiplicando l'uguaglianza $a \cdot b = 0$ per a^{-1} a destra e a sinistra dell'uguale, si ottiene $a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0$, da cui segue $b = 0$.

Operativamente, questa proprietà indica che, quando nella ricerca degli zeri di una data espressione, la fattorizzazione, cioè la riscrittura in termini di prodotto, è, generalmente, vantaggiosa.

Risolto il problema delle operazioni inverse, rimane il difetto "metrico". È ragionevole sospettare che la definizione di $\mathbb{Q}$ possa risolvere in un colpo solo sia il problema della divisione che quello della misurazione di lunghezze... ma è così?

Rappresentazione grafica dei razionali. Disegniamo una retta R (o *asse numerico*) e procediamo secondo questa scaletta.

(i) Scegliamo un punto di R come rappresentante di 0, che chiameremo origine, e un altro punto arbitrario come rappresentante del numero 1. Definiamo la direzione da 0 a 1 come direzione positiva, in questo modo, la retta R diviene una retta *orientata* (d'ora in poi, penseremo di aver scelto 1 alla destra di 0).

(ii) Replicando copie del segmento unitario nella direzione positiva di R (cioè alla destra di 1), otteniamo una famiglia di punti che indichiamo con $2, 3, \dots$. Detto in altre parole, rappresentiamo tutti i numeri naturali come punti sulla retta R.

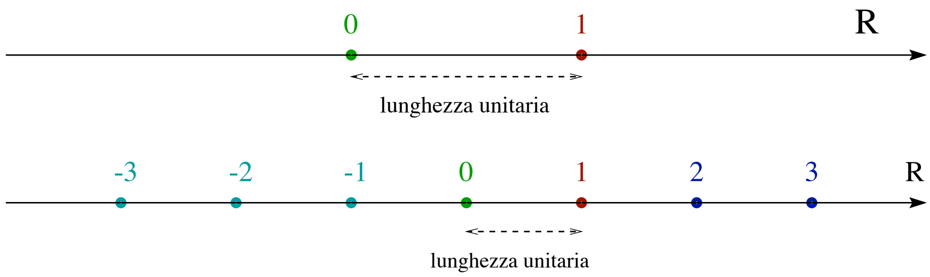

FIGURA 1. Dall'alto verso il basso: *(a)* i punti 0 e 1 sulla retta R determinano il segmento di lunghezza unitaria; *(b)* la rappresentazione dei numeri interi su R.

(iii) Ripetendo lo stesso procedimento nella direzione negativa (alla sinistra di 0), otteniamo, allo stesso modo, una rappresentazione per gli interi negativi. Con questo procedimento, insieme a quanto fatto in (ii), arriviamo ad una rappresentazione i numeri interi sulla retta R.

(iv) Rappresentiamo ora i numeri razionali $\dfrac{p}{q}$ su R per cui $p, q \in \mathbb{N}$ con p più piccolo di q. Dato che il numero $\frac{p}{q}$ è, moralmente, "p volte $1/q$", si divide l'intervallo unitario in q parti di uguale lunghezza e si prende come rappresentante di $\frac{p}{q}$ l'estremo destro del $p-$esimo intervallo.

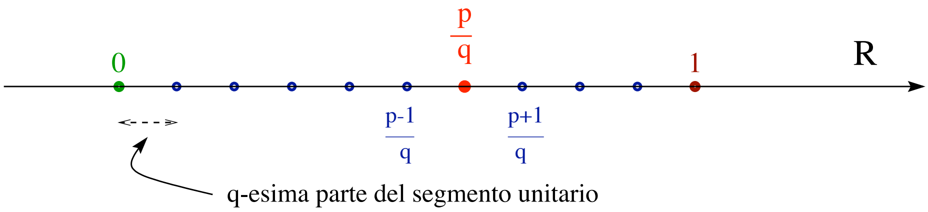

FIGURA 2. La rappresentazione su R di un numero razionale $\frac{p}{q}$ per cui $p, q \in \mathbb{N}$ e $p < q$.

(v) Nel caso di un qualsiasi numero razionale positivo p/q, si determinano p' e r positivi, con r più piccolo di q tali che

$$\frac{p}{q} = p' + \frac{r}{q},$$

e si ripete l'operazione spiegata nel passo precedente nel segmento di estremi p' e $p'+1$. Analogamente per i numeri razionali negativi.

Il significato geometrico della somma di numeri razionali è facile: se $x, y \in \mathbb{Q}$, il punto in R che corrisponde a $x + y$ corrisponde al punto che si ottiene applicando una copia del segmento di estremi 0 e y sul punto x in modo da far coincidere la copia del punto 0 con x.

Ordine, modulo e distanza nei numeri razionali. Una volta rappresentati i numeri razionali su una retta R che è orientata, è possibile mettere ordine in $\mathbb{Q}$.

DEFINIZIONE 1.1. *Ordinamento in $\mathbb{Q}$.* *Se $x, y \in \mathbb{Q}$, allora x* è minore di *y (o, equivalentemente, y* è maggiore di *x), se, nella rappresentazione su R, x si trova alla sinistra di y. In tal caso si scrive*

$$x < y.$$

Se x è minore di y o uguale ad y, si scrive $x \leq y$

$$x \leq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < y \quad \textit{oppure} \quad x = y.$$

Un numero $x \in \mathbb{Q}$ è positivo[1] *se $x > 0$ ed è* negativo *se $x < 0$. Se x è positivo o è zero, si dice che è* non negativo *e si scrive $x \geq 0$ e, analogamente, se x è negativo o è zero, è* non positivo *e si scrive $x \geq 0$.*

[1]Qualcuno usa una terminologia leggermente diversa: con il termine "positivo" indica un numero alla destra di 0, eventualmente anche 0 stesso, mentre un numero positivo, ma non zero, viene detto "strettamente positivo". Analogo discorso per i numeri negativi e per la relazione d'ordine. Se y è alla destra di x ed eventualmente è x dice che "y è maggiore di x"; se y è alla destra di x, ma non coincide con x, dice che "y è strettamente maggiore di x". Basta mettersi d'accordo.

Basandosi sull'idea grafica che abbiamo dei numeri razionali, è sensato assumere che la relazione d'ordine $<$ goda delle due proprietà seguenti: per ogni x, y, z,

$$\begin{aligned} x < y, \quad y < z \qquad &\Rightarrow \qquad x < z, \\ x < y \qquad &\Rightarrow \qquad x + z < y + z, \\ x, y > 0 \qquad &\Rightarrow \qquad x \cdot y > 0. \end{aligned}$$

Infatti, la prima implicazione discende dal fatto che i numeri $x + z$ e $y + z$ sono traslazioni di z dei punti x ed y e quindi mantengono lo stesso ordinamento. La seconda si interpreta notando che, se $x = p/q$, il punto corrispondente al prodotto $x \cdot y$ si ottiene "incollando", nella direzione dei numeri positivi, p copie di un segmento di lunghezza y/q.

A questo punto, si introduce un oggetto di fondamentale importanza: il *modulo*.

Definizione 1.2. *Modulo e distanza in $\mathbb{Q}$.* *Dato $x \in \mathbb{Q}$, il* modulo di x *(detto anche* valore assoluto *o* norma*) si indica con $|x|$ ed è definito da*

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Dati due numeri razionali $x, y \in \mathbb{Q}$, si chiama distanza di x da y *il numero $|x - y|$.*

Geometricamente, il numero (non negativo) $|x|$ rappresenta la lunghezza del segmento in R che ha per estremi il punto x ed il punto 0; analogamente $|x - y|$ è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto x ed il punto y.

Non tutte le lunghezze sono razionali. Passiamo al collaudo di $\mathbb{Q}$ (rappresentato sulla retta R), per la misurazione di lunghezze. Armiamoci di una fettuccia

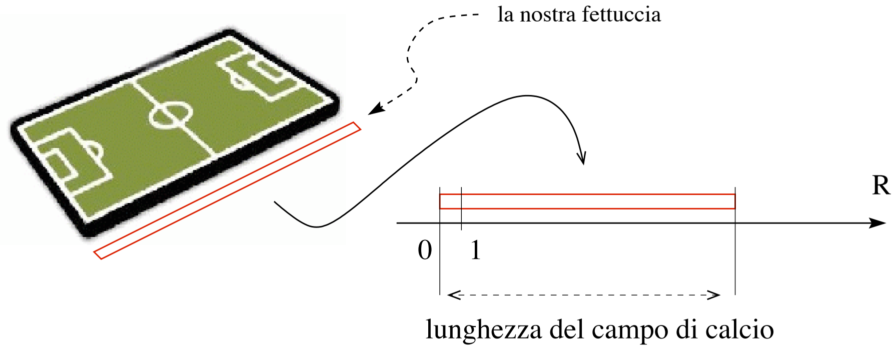

Figura 3. Il procedimento di misurazione: un campo di calcio.

di stoffa (o di fantasia) e procediamo nel modo più semplice possibile: se vogliamo misurare la lunghezza di un certo oggetto (un tavolo, un campo di calcio, quel che sia...), fissiamo un estremo della fettuccia ad una estremità dell'oggetto da misurare ed estendiamola fino all'altro estremo, tagliamo la fettuccia in concomitanza con il secondo estremo e riportiamo la fettuccia lungo la retta R. Collochiamo il primo estremo in corrispondenza del punto 0, stendiamo la fettuccia in tutta la sua lunghezza nella direzione positiva e vediamo il secondo estremo dove va a finire. **Se** quest'ultimo finisce in corrispondenza di un numero razionale, quel numero è la lunghezza desiderata... Non è un errore di stampa il fatto che il "Se" sia scritto in neretto: questo procedimento non sempre funziona: alcune lunghezze non corrispondono a nessun numero razionale!

Già i matematici greci scoprirono che esistono segmenti la cui lunghezza non è un numero razionale, cioè esistono punti della retta R che non corrispondono a nessun numero razionale: in simboli, $R \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. L'esempio più elementare di lunghezza non razionale è la lunghezza ℓ della diagonale di un quadrato di lato unitario. Infatti, per

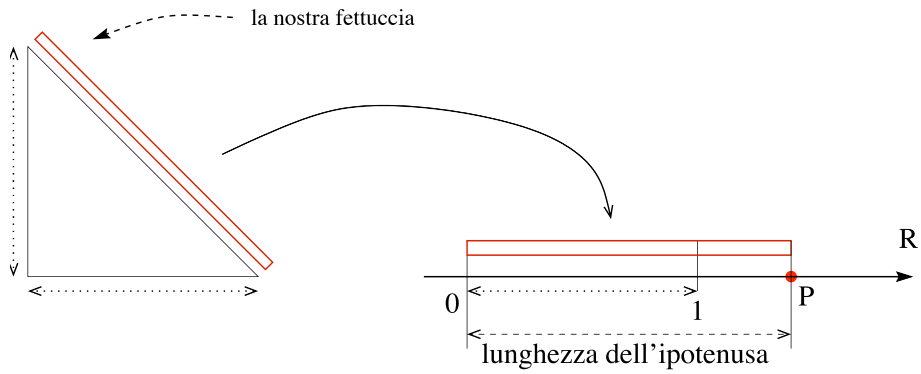

FIGURA 4. Il procedimento di misurazione dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo di lato unitario: il punto P non corrisponde a nessun numero razionale.

il teorema di Pitagora, $\ell^2 = 2$, ma *nessun numero razionale elevato al quadrato dà per risultato il valore* 2.[2]

ESERCIZIO 1.3. *Dimostrare che $\sqrt{p}$ non è razionale per ogni numero p primo. Lo stesso per $\sqrt[n]{p}$ con $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Quali altre classi di numeri irrazionali sai immaginare a partire da questo esempio?*

L'introduzione dei numeri razionali, che sembrava così promettente, non ha risolto il difetto "metrico" che avevamo già trovato in $\mathbb{N}$. Infatti è possibile costruire oggetti

[2]Per dimostrare questa affermazione, supponiamo, al contrario, che $\ell = p/q$ per opportuni p, q interi positivi. Senza restrizione, possiamo supporre che p e q non abbiano fattori comuni (altrimenti si possono semplificare). Allora si deve avere $p^2 = 2q^2$, quindi p^2 deve essere un numero pari. Dato che il quadrato di un numero dispari è dispari, anche p deve essere pari, cioè della forma $p = 2r$ con r intero positivo. Sostituendo, si ottiene $4r^2 = 2q^2$, e, semplificando il fattore 2, $2r^2 = q^2$. Ne segue che q^2 è pari e, di conseguenza, lo è anche q. Quindi p e q avrebero un fattore comune in contraddizione con la nostra ipotesi. Pertanto ℓ non può essere razionale.

la cui lunghezza non è misurabile con un elemento di $\mathbb{Q}$. Prossima tappa: estendere $\mathbb{Q}$ in modo da ottenere un insieme (con le stesse proprietà algebriche e metriche di $\mathbb{Q}$) in cui sia possibile misurare tutte le lunghezze possibili. Questa estensione è l'oggetto che chiamiamo *insieme dei numeri reali.*

2. Descrizione intuitiva dei numeri reali

Dato che i numeri razionali non sono sufficienti per le misurazioni, è necessario "inventare" nuovi numeri che permettano di misurare tutti i possibili segmenti. Prendiamo il toro per le corna e dichiariamo che: "ogni punto della retta R è un numero", che chiameremo numero reale:

$$\text{insieme dei numeri reali:} \qquad \mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \{\text{punti di } R \text{ che non sono in } \mathbb{Q}\}.$$

Un elemento di $\mathbb{R}$ che non sia in $\mathbb{Q}$ si dice numero irrazionale. I numeri reali quindi, per definizione, coincidono con quelli della retta reale R. Esattamente come detto e fatto in precedenza, pensiamo la retta $\mathbb{R}$ con orientamento da sinistra verso destra. La scelta del simbolo $\mathbb{R}$ (che sostuisce R) sta a ricordare che stiamo pensando i punti della retta come oggetti per cui sono definite operazioni di somma e prodotto.

Questa definizione di numero reale grida vendetta: è intuitiva e andrebbe precisata rigorosamente. A questo livello, però, ci accontentiamo di questa versione naïf.[3]

Si tratta ora di capire quale rappresentazione possiamo dare ad un qualsiasi numero reale, cosa significano le operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{R}$ e i concetti di ordine e distanza?

Per la somma (e quindi la differenza) basta ricordare il significato della somma di razionali come punti sulla retta. Se x, y sono due numeri reali, per determinare dove si trovi sulla retta $\mathbb{R}$ il punto $x+y$, basta procedere come segue. Rappresentiamo y come una freccia che parte da 0 e arriva nel punto corrispondente y. Per ottenere $x+y$ basta fare un "cut'n'paste" della freccia da 0 a y: se ne fa una copia e si trasla in modo da far coincidere il punto di partenza della freccia con x. Il nuovo punto di arrivo della freccia determina la posizione di $x+y$. Nel caso della differenza $x-y$, bisogna invertire la freccia che rappresenta y.

Le operazioni di prodotto e divisione in $\mathbb{Q}$ possono essere estese, per approssimazione, ad $\mathbb{R}$, ma non ci soffermeremo qui sulla questione. Ci limitiamo a comunicare che valgono le stesse proprietà elencate per i numeri razionali, che, per completezza, riportiamo qui di seguito:

leggi associative: $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a(bc) = (ab)c$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$;

[3] L'idea intuitiva di numero reale come punto dell'asse numerico è stata alla base della matematica per lunghissimo tempo. Solo più tardi, nel XIX secolo, tale ipotesi è stata giustificata in modo rigoroso.

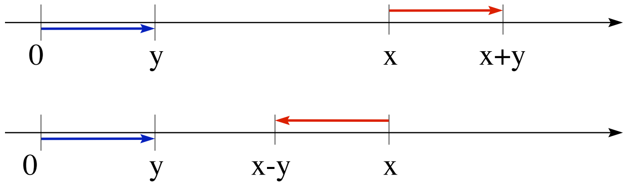

FIGURA 5. Somma e differenza di numeri reali.

leggi commutative: $a + b = b + a$ e $ab = ba$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$;
esistenza dell'elemento neutro per la somma: $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;
esistenza dell'elemento neutro per il prodotto: $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;
esistenza dell'opposto per la somma: $a + (-a) = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;
esistenza dell'inverso per il prodotto: $a \cdot a^{-1} = 1$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;
legge distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Anche ordinamento e distanza si possono estendere da $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 2.1. *Ordinamento in* $\mathbb{R}$. *Se* $x, y \in \mathbb{R}$, *allora* x è minore di y *(o* y è maggiore di x*), se* x *si trova alla sinistra di* y*. In tal caso si scrive* $x < y$.

Per i simboli $\leq$ *e* $\geq$*, e per i termini positivo/negativo/non negativo/non positivo si utilizza lo stesso significato già visto per i numeri razionali.*

DEFINIZIONE 2.2. *Modulo e distanza in* $\mathbb{R}$. *Dato* $x \in \mathbb{R}$, *il* modulo di x *(detto anche* valore assoluto *o* norma*) si indica con* $|x|$ *ed è definito da*

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Dati due numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, *si chiama* distanza di x da y *il numero* $|x - y|$.

Tutte le proprietà che abbiamo descritto fanno di $\mathbb{R}$ (così come lo era $\mathbb{Q}$) un campo totalmente ordinato dotato di metrica... più qualcosa... Mentre $\mathbb{Q}$ è, in un certo senso, "bucato", $\mathbb{R}$ non lo è... Cosa vuol dire rigorosamente che "$\mathbb{R}$ non ha buchi"? Ci dedicheremo tra una manciata di pagine a spiegare in maniera più precisa come trasformare questa idea intuitiva in un oggetto matematicamente chiaro.

M'approssimo in un denso. Sebbene i numeri razionali non coprano tutta la retta dei numeri reali $\mathbb{R}$ per via della presenza di numeri irrazionali, è vero che ci vanno molto vicini... Comunque si fissa una soglia di errore ammissibile, è possibile approssimare un numero reale con un numero razionale commettendo un errore più piccolo della soglia consentita. Infatti, supponiamo (per semplicità) che la soglia sia della forma $1/q_0$ con $q_0 \in \mathbb{N}$ (ad esempio, per $q_0 = 1000$, l'errore ammesso è $1/1000$). Dividiamo la retta reale $\mathbb{R}$ in segmenti di lunghezza $1/q_0$ e consideriamo i punti della forma p/q_0 con $p \in \mathbb{Z}$. Dato che $\mathbb{R}$ è l'unione dei segmenti con estremi p/q_0 e $(p+1)/q_0$ per $p \in \mathbb{Z}$, per ogni punto x di $\mathbb{R}$ esiste p_0 tale che

$$\frac{p_0}{q_0} \leq x \leq \frac{p_0+1}{q_0}.$$

Quindi è possibile approssimare il punto x con un razionale p_0/q_0 commettendo un errore minore di $1/q_0$. Il fatto che i punti razionali siano arbitrariamente vicini ad ogni punto x di $\mathbb{R}$ si esprime affermando che *l'insieme dei razionali è <u>denso</u> nell'insieme dei numeri reali* e si scrive, in simboli, come segue

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, y \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che} \quad |x-y| < \varepsilon,$$

Torneremo più avanti sulla validità di questa affermazione.

Dal punto di vista della misurazione concreta, la densità è una proprietà notevole: infatti, tenendo conto che ogni tipo di misurazione ha una precisione minima fissata, ogni misura può essere, in concreto, compiuta attraverso numeri razionali. Anche una qualsiasi calcolatrice è in grado di gestire solo (un sottoinsieme dei) numeri razionali: ad esempio, spingendo i tasti che forniscono il valore della radice quadrata del numero 2 si ottiene una risposta del tipo 1,4142136 che è una approssimazione razionale dell'effettivo valore del numero reale $\sqrt{2}$.

Intervalli limitati ed illimitati. Dati $a < b$, il segmento in $\mathbb{R}$ di estremi a, b si chiama intervallo. Se gli estremi a, b sono inclusi nell'intervallo, l'intervallo si dice chiuso, se invece vengono esclusi si dice aperto:

$$\text{intervallo aperto:} \qquad (a,b) := \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\},$$
$$\text{intervallo chiuso:} \qquad [a,b] := \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}.$$

In entrambi i casi il valore $b-a$ è la lunghezza dell'intervallo (o misura dell'intervallo).

Si possono considerare anche intervalli semiaperti (o semichiusi) includendo uno solo dei due estremi: $(a,b]$ oppure $[a,b)$. Anche le semirette sono usualmente considerate "intervalli" e si indicano con

$$(a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > a\} \qquad [a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq a\},$$

e varianti. Anche l'insieme $\mathbb{R}$ può essere pensato come intervallo e, in tal caso, viene indicato con $(-\infty,+\infty)$. Se necessario, per distinguere il caso degli intervalli ad estremi in $\mathbb{R}$ da quello delle semirette, si parla, nel primo caso, di *intervalli limitati*, nel secondo di *intervalli illimitati*.

Gli intervalli (limitati e illimitati) sono tutti e soli i sottoinsiemi I di $\mathbb{R}$ che godono della proprietà seguente:

$$(x_1,x_2) \subset I \qquad\qquad \forall\, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2.$$

Questa proprietà si esprime dicendo che *gli intervalli sono insiemi* connessi.

Il piano ed altre realtà. Dati due insiemi A e B si indica con $A \times B$ l'insieme

$$\text{prodotto cartesiano di } A \text{ e } B: \quad A \times B = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\},$$

Ad esempio, a quale insieme appartiene l'oggetto "giorno dell'anno"? Due numeri lo individuano: il giorno del mese (che appartiene all'insieme $I := \{1, 2, 3, \ldots, 31\}$) e il numero del mese (che appartiene all'insieme $J := \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$), quindi è un elemento del prodotto cartesiano $I \times J$. Ad esempio, la data 3 aprile corrisponde all'elemento $(3, 4)$ dell'insieme $I \times J$.

Con il simbolo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o con $\mathbb{R}^2$ si indica il prodotto cartesiano dell'insieme $\mathbb{R}$ con sé stesso, ossia l'insieme costituito dalle coppie ordinate (x, y) dove $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

La sottolineatura della parola "ordinate" sta a segnalare che, in generale, l'elemento (x, y) è diverso da (y, x). Ad esempio, $(1, 2) \neq (2, 1)$ (il primo febbraio è diverso dal 2 gennaio!). Per rappresentare l'insieme $\mathbb{R}^2$ si utilizza in genere un piano. Scegliete due rette orientate di riferimento, ortogonali fra loro e battezzatele, rispettivamente "asse x" e "asse y". Per disegnare l'elemento (x_0, y_0), si segna sull'asse x il punto H corrispondente al numero reale x_0 e sull'asse y quello K corrispondente al numero reale y_0. Dopo di che si tracciano la retta per H e parallela all'asse y (quindi ortogonale all'asse x) e la retta per K e parallela all'asse x. Il punto intersezione rappresenta il punto (x, y). I numeri x e y sono detti coordinate di (x, y). Pensando $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come

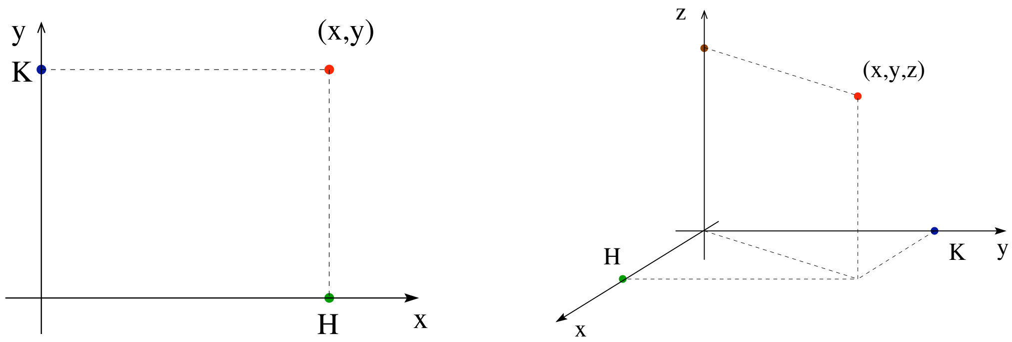

FIGURA 6. Il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ e lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$.

un piano, come si rappresentano gli insiemi $\{1\} \times \{2\}$, $[0, 1] \times \{2\}$ e $[0, 1] \times [0, 2]$? Rispettivamente, un punto, un segmento ed un rettangolo (Fig. 7).

Il piano reale $\mathbb{R}^2$ è dotato in maniera naturale dell'operazione di somma: si tratta della somma definita componente per componente:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \tag{1}$$

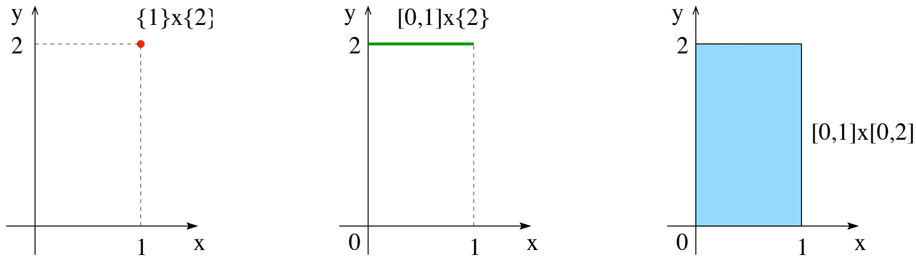

FIGURA 7. Gli insiemi $\{1\} \times \{2\}$, $[0,1] \times \{2\}$ e $[0,1] \times [0,2]$.

Non è evidente, al contrario, come dare una nozione di prodotto tra due punti[4] del piano $\mathbb{R}^2$. E' possibile, invece, introdurre la nozione di prodotto per uno scalare: dato $\lambda \in \mathbb{R}$, si definisce

$$\lambda\,(x, y) := (\lambda\,x, \lambda\,y). \tag{2}$$

Con le definizioni (1) e (2), il piano $\mathbb{R}^2$ viene dotato della struttura di spazio vettoriale e i suoi elementi vengono detti vettori.

Analogamente $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o $\mathbb{R}^3$, indica l'insieme di terne ordinate di numeri reali (x, y, z). L'insieme $\mathbb{R}^3$ si rappresenta con lo spazio, tramite una scelta di tre assi coordinati ortogonali tra loro. In generale, $\mathbb{R}^n$ (dove $n \in \mathbb{N}$) indica l'insieme delle $n-$ple del tipo $(x_1, \ldots, x_n)$ dove $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. In sintesi

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \,:\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

I casi $n = 2$ e $n = 3$ possono essere rappresentati geometricamente come un piano e tutto lo spazio, rispettivamente. In questa rappresentazione, i valori della coppia/terna corrispondono alle coordinate cartesiane di un punto. Nel caso di $\mathbb{R}^n$, i valori della $n-$pla possono essere interpretati come coordinate cartesiane $n-$dimensionali, ma poco si può visualizzare a meno di non possedere dei superpoteri.

Nell'insieme $\mathbb{R}^n$ sono definite le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare, dati $x = (x_1, \ldots, x_n), \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$x + \xi = (x_1, \ldots, x_n) + (\xi_1, \ldots, \xi_n) := (x_1 + \xi_1, \ldots, x_n + \xi_n). \tag{3}$$

$$\lambda\,(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda\,x_1, \ldots, \lambda\,x_n). \tag{4}$$

In questo modo, $\mathbb{R}^n$ acquisice la struttura di spazio vettoriale e, anche in questo caso, i suoi elementi vengono detti vettori.

[4]Definire il prodotto componente per componente, non è una buona idea (perché?). Una possibilità per introdurre il concetto di prodotto nel piano è alla base della definizione di numero complesso, che verrà ripresa più avanti.

Anche in $\mathbb{R}^n$ è possibile introdurre le nozioni di modulo e distanza. La versione che generalizza le corrispondenti definizioni date in $\mathbb{R}$ è quella che segue.

DEFINIZIONE 2.3. Modulo e distanza in $\mathbb{R}^n$. *Dato $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il* modulo di *$x$ si indica con $|x|_n$ ed è definito da*

$$|x|_n := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} \tag{5}$$

Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, si chiama distanza di *x* da *y il numero $|x - y|_n$.*

Queste definizioni sono state fornite per completezza. Nella quasi totalità di quel che segue, utilizzeremo quasi sempre solo il modulo e la distanza dell'insieme $\mathbb{R}$.

3. Ordinamento e struttura metrica dei numeri reali

Ordine e diseguaglianze. Nella pratica spesso è difficile determinare con precisione una quantità x. Ben più facile è ottenere una *stima di x*, cioè mostrare che x è compreso tra una certa quantità a e un'altra quantità b. e, in molte situazioni, una buona stima di x è un'informazione sufficiente per la soluzione del problema. Le diseguaglianze sono, perciò, un oggetto fondamentale nell'uso dei numeri reali.

Come eredità delle corrispondenti proprietà valide per i numeri razionali, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ valgono

(proprietà transitiva)	$x < y, \quad y < z$	$\Rightarrow$	$x < z,$
(invarianza per traslazioni)	$x < y$	$\Rightarrow$	$x + z < y + z,$
(regola del segno)	$x, y > 0$	$\Rightarrow$	$x \cdot y > 0.$

Da queste due implicazioni discendono alcune regole di uso quotidiano.

i. *Le disuguaglianze possono essere sommate*

$$w < x, \quad y < z \qquad \Rightarrow \qquad w + y < x + z.$$

Infatti, grazie all'invarianza per traslazioni, dalle ipotesi discendono $w + y < x + y$ e $x + y < x + z$. Quindi, per la proprietà transitiva, si ha $w + y < x + z$.

Sottrarre le disuguaglianze ottenendo $w - y < x - z$, invece, **non** è legittimo: ad esempio, $1 > 2$ e $1 > 3$, ma $1 - 1 = 0 > -1 = 2 - 3$.

ii. *Le disuguaglianze possono essere moltiplicate per un numero positivo*

$$x < y, \quad 0 < z \qquad \Rightarrow \qquad x \cdot z < y \cdot z.$$

Infatti, l'invarianza per traslazioni permette di dedurre la relazione $0 < y - x$ e quindi, per la regola dei segni, vale la relazione $0 < (y - x) \cdot z = y \cdot z - x \cdot z$. Una nuova applicazione dell'invarianza per traslazioni fornisce la conclusione.

Nel caso in cui x, y siano positivi, questa proprietà può essere interpretata come una *invarianza per dilatazioni/compressioni*, nel senso che se il segmento di estremi 0 e x è più corto di quello di estremi 0 ed y, allora anche le corrispondenti dilatazioni/compressioni di un fattore z (dilatazioni nel caso $z > 1$ e compressioni nel caso $z < 1$) mantengono la stessa relazione di ordine.

iii. *il prodotto $x \cdot y$ è positivo se e solo se x e y sono di segno concorde ed è negativo se e solo se sono di segno discorde.*
Basta infatti considerare tutti i casi possibili. Il caso di x ed y positivi è dato dalla regola del segno. Nel caso $y < 0 < x$, si ha $x \cdot y = x \cdot (-1) \cdot (-y) = -x \cdot (-y)$. Dato che $-y > 0$, ne segue $x \cdot (-y) > 0$ e quindi $x \cdot y < 0$. Gli altri casi si trattano analogamente.

Una parte dell'Analisi matematica consiste nel lavorare con disuguaglianza per stimare grandezze assolute e grandezze relative. Spesso e volentieri quindi ci si trova a voler controllare dall'alto o dal basso espressioni complicate con altre espressioni dalla struttura più semplice. Si tratta di un'arte non semplice che si impara nel corso degli anni. Vediamo qui qualche primo esempio di disequazione significativa.

Ad esempio, dimostriamo che *per ogni $x \geq 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale la stima*

$$(1+x)^n \geq 1 + n\,x.$$

Utilizziamo il metodo di induzione: dato che l'affermazione da dimostrare consiste in una famiglia di disequazioni, una per ogni numero naturale n,

1. dimostriamo l'affermazione nel caso $n = 1$;

2. supponiamo valida l'affermazione per n generico e dimostriamola per $n + 1$.

In questo modo, siamo garantiti che la proprietà vale per ogni intero n. Infatti, utilizzando il passo **2.** con la scelta $n = 1$, deduciamo la validità della disequazione nel caso $n = 2$; basandoci di nuovo sul passo **2.** con la scelta $n = 2$, otteniamo il risultato per $n = 3$, e così via...

Il primo passo è semplicissimo: infatti si ha $(1 + x)^1 = 1 + x$ e $1 + 1\,x = 1 + x$, quindi i due termini coincidono per ogni scelta di x.

Supponiamo ora che la proprietà valga con n. Di conseguenza, utilizzando l'ipotesi induttiva, si hanno

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+n\,x)\,(1+x)\\ &= 1 + (n+1)\,x + n\,x^2 \geq 1 + (n+1)\,x,\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza discende dal fatto che $n\,x^2$ è non negativo. In quale punto è stata utilizzata la richiesta $x \geq 0$?

Oltre a sommare/moltiplicare disequazioni, è chiaro che si può ambire ad applicare altre operazioni. Vediamo il caso dell'elevazione a potenza.

Nel caso dell'elevazione al quadrato, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, vale $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$. Se $x, y > 0$, allora $y + x > 0$; quindi

$$\text{se} \quad x, y > 0, \qquad \text{allora} \qquad x < y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 < y^2.$$

Espresso in parole, *l'elevazione al quadrato preserva l'ordine dei numeri positivi*[5]. La stessa proprietà vale per qualsiasi potenza $n \in \mathbb{N}$: *per ogni* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\textit{se} \quad x, y > 0, \qquad \textit{allora} \qquad x < y \quad \Longleftrightarrow \quad x^n < y^n. \tag{6}$$

Vale infatti la fattorizzazione

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + y\,x^{n-2} + x^{n-1}).$$

Dato che il secondo fattore a secondo membro è positivo se lo sono x ed y, $y^n - x^n$ ha lo stesso segno di $y - x$.

Se n è dispari, la conclusione di (6) vale per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Infatti, nel caso in cui entrambi i valori x ed y siano negativi, la relazione $x < y < 0$ equivale a $0 < -y < -x$ che, per quanto visto in precedenza, vale se e solo se $(-y)^n < (-x)^n$. Dato che $(-1)^n = -1$ per n dispari, ne segue $-y^n < -x^n$, cioè $x^n < y^n$. Se $x < 0 < y$, allora, per la regola dei segni, si ha $x^n < 0 < y^n$.

Il modulo. Ricordiamo che, dato $x \in \mathbb{R}$, il modulo di x è definito da

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Dalla definizione segue facilmente l'uguaglianza: $|x| = \max\{x, -x\}$.

L'innocuo simbolo $|\cdot|$ gode di tre proprietà che gli conferiscono poteri strabilianti.

Proposizione 3.1 (Proprietà del modulo). *Valgono le seguenti proprietà:*
(i) $|x| \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *e* $|x| = 0$ *se e solo se* $x = 0$*;*
(ii) il prodotto dei moduli è il modulo del prodotto: $|xy| = |x||y|$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$*;*
(iii) vale la disuguaglianza triangolare*:*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. La prima proprietà è banale. Per la seconda, basta tenere conto della regola dei segni per il prodotto di numeri reali: ad esempio, consideriamo il caso $x < 0 < y$, allora $xy < 0$ e quindi $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$. Analogamente per gli altri casi. Resta da dimostrare la diseguglianza triangolare (iii). Distinguiamo i casi

[5] Attenzione, lo stesso NON è vero per numeri reali qualsiasi! Ad esempio, $-2 < -1$, ma $(-2)^2 = 4 > 1 = 1^2$.

$x + y \geq 0$ e $x + y < 0$. Nel primo caso, la diseguaglianza afferma $x + y \leq |x| + |y|$, che discende direttamente da $x \leq |x|$ e $y \leq |y|$ e dalla somma di queste due disequazioni. Nell'altro caso, la diseguaglianza diviene $-(x+y) \leq |x|+|y|$, che discende dalla somma delle disequazioni $-x \leq |x|$ e $-y \leq |y|$. $\square$

Dato che il modulo è indipendente dal segno, cioè $|-x| = |x|$, la diseguaglianza triangolare vale anche con il segno $-$ al posto di $+$, cioè vale anche $|x - y| \leq |x| + |y|$. È facile trovare esempi che mostrano che per certe scelte di x e y la diseguaglianza $|x - y| \leq |x| - |y|$ è falsa.

Applicando due volte la diseguaglianza triangolare, si ottiene

$$|x + y + z| = |(x + y) + z| \leq |x + y| + |z| \leq |x| + |y| + |z|.$$

Allo stesso modo, si ottiene la diseguaglianza più generale

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \qquad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, .$$

o, equivalentemente (tramite il simbolo di sommatoria)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

Quindi, il modulo della somma è sempre minore o uguale della somma dei moduli.

Il ruolo fondamentale del modulo è di definire la distanza tra numeri reali: precisamente, dati $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\text{distanza di } x \text{ da } y: \qquad |x - y|.$$

L'insieme dei punti che distano da un punto fissato meno di un dato valore fissato ricorrerà numerose volte nelle prossime pagine.

Definizione 3.2. *Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, si chiama* intorno di x_0 di raggio r *l'insieme e si indica con $I_r(x_0)$*

$$I_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

È evidente l'equivalenza

$$|x - x_0| < r \qquad \iff \qquad x_0 - r < x < x_0 + r, \tag{8}$$

quindi l'intorno di x_0 di raggio r è un intervallo aperto e, precisamente

$$I(x_0; r) = (x_0 - r, x_0 + r).$$

Dalla relazione (8) segue anche la stima

$$\Big|\, |x| - |y| \,\Big| \leq |x - y| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

che può essere interpretata come una stima di errore per il modulo: se si sostituisce il modulo del valore y con quello del valore x, l'errore commesso è sempre minore o uguale alla distanza tra i valori y ed x. Infatti, scegliendo x, x_0, r pari a $|x|$, $|y|$ e $|x-y|$, rispettivamente, si deduce che (9) è equivalente a

$$|y| - |x - y| \leq |x| \leq |y| + |x - y|,$$

ed entrambe le relazioni discendono dalla disuguaglianza triangolare (perché?).

4. La verità sui reali

È giunto il momento di riprendere la questione della *completezza* dei numeri reali. Partiamo da un esempio illustrativo che spiega la situazione: disegniamo due curve nel piano così come in Figura 8. La domanda è: *queste due curve si intersecano oppure no?*

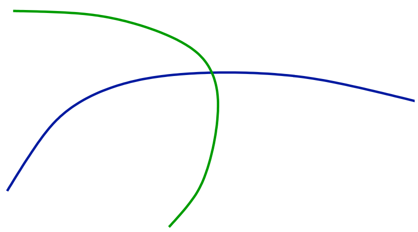

FIGURA 8. Due curve nel piano.

Un sondaggio del 2003 dà queste percentuali di risposta: il 78% degli intervistati dice "SI, SEMPRE", il 5% dice "QUALCHE VOLTA", il 3% dice "QUASI MAI", il 10% risponde "NON SO" e il 4% fugge scappando per timore di fare brutta figura. Evidentemente la risposta è racchiusa in quello che succede vicino al punto di incrocio delle due curve. Proponiamo tre maniere diverse di ragionare.

Versione "atomistica" (o "alla Democrito"). In questa versione, si immagina che le curve siano costituite da punti equidistanti (a distanza tanto piccola che l'occhio non è in grado di distinguerli, e vede solo un linea apparentemente continua). Con un ingrandimento di scala si vede bene che (a meno di casi particolarmente fortunati) le due curve, discretizzate in tanti atomi, non si incontrano. La risposta in questo caso è "(QUASI) MAI".

Versione "razionale". Questa volta, immaginaniamo le curve come rette, formate dall'unione di soli punti razionali, deformate. Qui il disegno non è facile: dato che in ogni intervallo cadono infiniti punti di $\mathbb{Q}$, nessun ingrandimento permette di riconoscere "a occhio" se ci sia intersezione oppure no. Però sappiamo già che in alcuni casi non c'è intersezione: ad esempio, non esistono numeri razionali x tali che $x^2 = 2$, cioè le

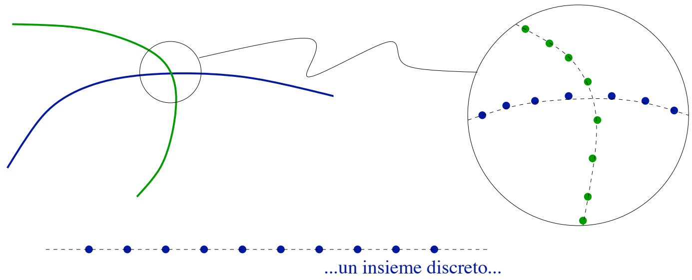

Figura 9. Versione "quantizzata": una retta è un'unione di punti a distanza fissata.

curve nel piano (x, y) (con x, y razionali) definite da $y = x^2$ e $y = 2$ non si intersecano. Il seguace di questa corrente di pensiero risponde "QUALCHE VOLTA".

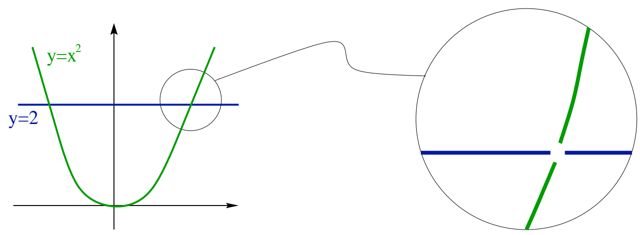

Figura 10. Versione "razionale": la parabola $y = x^2$ e la retta $y = 2$ nel piano (x, y) con $x, y \in \mathbb{R}$ non si intersecano mai.

Versione "reale". Infine c'è la versione reale: rette e curve costituiscono un "continuo" di punti senza interruzione. Dunque le due curve si intersecano sempre. Ogni ingrandimento del punto di incontro delle curve dà sempre e comunque lo stesso tipo di figura.

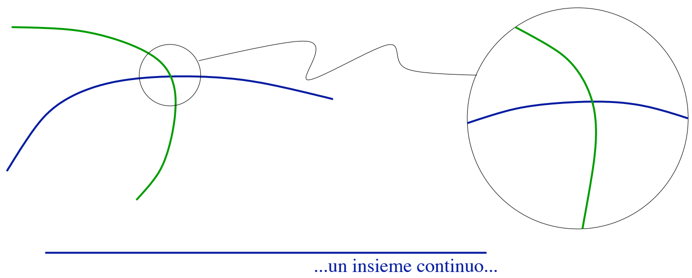

Figura 11. Versione "reale": l'idea intuitiva di "continuo".

Qual'è la risposta "esatta"? Tutte allo stesso tempo... Quello che conta, infatti, è decidere fin dall'inizio qual'è il tipo di visione che vogliamo prediligere e seguirla con coerenza e chiarezza. Scegliere una strada significa decidere qual'è l'ambiente base (discreto, razionale, continuo) con cui lavoriamo chiarendo bene quali siano le proprietà di cui gode. Tali proprietà vengono tradotte in *assiomi* (o *postulati*) che si dichiarano veri al principio. *La nostra scelta è di lavorare con l'insieme dei numeri reali.* I motivi sono tanti, primo fra tutti il fatto che la percezione del "continuo", cioè di un universo "senza buchi" (seppure sbagliata a livello microscopico!), è estremamente naturale.

Occorre ora chiarire il significato preciso della frase "l'insieme dei numeri reali non ha buchi". Ci sono vari modi per esprimere la *completezza dei numeri reali*; qui scegliamo come assiomi di partenza

– la *proprietà di Archimede*,[6]

– e il *postulato degli intervalli incapsulati*,

Analizziamo il contenuto dei due principi separatamente.

Proprietà di Archimede. *Per ogni numero x, esiste un numero naturale n più grande di x: in simboli,*

$$\forall\, x, \qquad \exists\, n \in \mathbb{N}, \qquad \textit{tale che} \quad x < n.$$

La proprietà di Archimede è vera nell'insieme $\mathbb{Q}$. Infatti, se $x \in \mathbb{Q}$, allora esso è della forma $x = \frac{p}{q}$ con p, q interi. Se supponiamo, senza perdere in generalità, $x > 0$, allora p e q possono essere scelti naturali. Se $p < q$, x è minore di 1; altrimenti, è possibile utilizzare l'algoritmo della divisione per scrivere $x = m + \frac{r}{q}$ con $r < q$. Allora, per il numero naturale $m + 1$ si ha

$$x = m + \frac{r}{q} < m + 1.$$

e il numero naturale $m + 1$ è quanto richiesto dalla proprietà.

L'esistenza di numeri naturali più grandi di una qualsiasi numero dato ammette come formulazione equivalente l'esistenza di intervalli di lunghezza razionale arbitrariamente piccola. Espresso in altri termini, si richiede di poter effettuare ingrandimenti arbitrariamente forti in scala razionale di una piccola zona della retta reale a cui si è interessati. In effetti, vale la seguente implicazione

$$x \leq \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \leq 0. \tag{10}$$

Infatti, se, per assurdo fosse $x > 0$, per la proprietà di Archimede, esisterebbe $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > 1/x$. Dato che $x > 0$, anche $1/x > 0$, quindi n è diverso da zero. Moltiplicando per x/n, si dedurrebbe $x > 1/n$ in contraddizione con l'ipotesi.

[6] In letteratura, la proprietà di Archimede è talvolta attribuita ad Eudosso di Cnido, che, probabilmente, ne è stato il primo ideatore. Attenzione, inoltre, a non confondere la proprietà di Archimede con il *principio di Archimede* che riguarda la galleggiabilità dei corpi e, quindi, pertiene a tutt'altro contesto.

Una conseguenza notevole dell'assioma di Archimede afferma, sostanzialmente, che, ovunque ci si trovi lungo la retta reale, si trovano sempre numeri razionali.

PROPOSIZIONE 4.1. *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $x < r < y$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il caso $0 < x < y$. Dato che $1/(y-x) \in \mathbb{R}$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $N \geq 1/(y-x)$. Consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ definito da

$$K := \{k \in \mathbb{N} \, : \, k \leq N\,x\}\,,$$

che è composto di un numero finito di elementi e indichiamo con h il più grande degli elementi di K. Allora, il numero razionale $r := (h+1)/N$ verifica la tesi. Infatti, dato che h è il più grande degli elementi di K, $h+1 \notin K$, cioè $h+1 > N\,x$. Inoltre, si ha

$$y - r = y - \frac{h}{N} - \frac{1}{N} \geq y - \frac{Nx}{N} - \frac{1}{N} = y - x - \frac{1}{N} \geq (y-x) - (y-x) = 0,$$

dato che $N \geq 1/(y-x)$. □

Passiamo al secondo assioma alla base della definizione dell'insieme dei numeri reali.

> Postulato degli intervalli incapsulati. *Per ogni successione di intervalli $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ <u>chiusi e limitati</u> che siano incapsulati, cioè tali che*
>
> $$I_{n+1} \subseteq I_n \qquad\qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$
>
> *esiste sempre almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 \in I_n$ per ogni n.*

Questo postulato, detto anche *principio di Cantor*, esprime il fatto che l'intersezione di una sequenza di intervalli chiusi e limitati in $\mathbb{R}$ è non vuota. Euristicamente, si può immaginare che il passaggio da un intervallo al successivo corrisponda ad un ingrandimento, in senso fotografico, di un segmento di numeri reali. L'assioma si traduce nel fatto che comunque si compiano queste successive zoomate, si riesce sempre a "vedere qualcosa", cioè c'è sempre almeno un punto che cade in tutti gli intervalli.

Nell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, questo postulato non vale. Per convincersi di questo fatto, costruiamo un esempio di successione di intervalli incapsulati la cui intersezione è costituita dal solo numero $\ell = \sqrt{2}$ ed è quindi vuota in $\mathbb{Q}$. Consideriamo come I_0 l'intervallo $[1, 2]$. Dato che

$$1^2 = 1 < \ell^2 = 2 < 4 = 2^2$$

il numero ℓ è compreso in I_0. Per costruire l'intervallo I_1 consideriamo il punto medio di I_0, dato da $\dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$ e notiamo che il suo quadrato è maggiore di 2. Quindi, si ha

$$1^2 = 1 < \ell^2 = 2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Scegliendo $I_1 = [1, 3/2]$, otteniamo un secondo intervallo, contenuto nel primo e che contiene il valore ℓ. Iteriamo il procedimento: individuato il punto medio di I_1, cioè $\frac{1+3/2}{2} = \frac{5}{4}$, calcoliamone il quadrato e stabiliamone la posizione rispetto a 2. Dato che

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} < \ell^2 = 2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

scegliamo $I_2 = [5/4, 3/2]$. Il procedimento dovrebbe essere chiaro: ad ogni passo, consideriamo il punto medio dell'intervallo I_n e determiniamone la sua collocazione rispetto a $\ell = \sqrt{2}$ attraverso il calcolo del suo quadrato. In base a tale posizione, scegliamo l'intervallo I_{n+1} come l'unico intervallo che si ottiene bisecando I_n tramite il punto medio e che contiene $\sqrt{2}$. La successione

$$\cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots \subseteq I_3 = \left[\frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right] \subseteq I_2 = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right] \subseteq I_1 = \left[1, \frac{3}{2}\right] \subseteq I_0 = [1, 2]$$

è una successione di intervalli incapsulati in cui l'intervallo $n-$esimo ha lunghezza 2^{-n}. L'intersezione di tutti questi intervalli contiene, per costruzione, il valore $\ell = \sqrt{2}$. Allo stesso tempo, non può contenere altri punti: infatti, dato $x \in I_n$ per ogni n, si ha

$$|x - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Per quanto visto in precedenza, durante la discussione della proprietà di Archimede, si ha $|x - \sqrt{2}| \leq 0$. Dato che il modulo fornisce sempre un valore non-negativo, $|x - \sqrt{2}| = 0$ cioè $x = \sqrt{2}$. Quindi, se considerata in $\mathbb{R}$ la successione di intervalli I_n ha intersezione non vuota, ma, se considerata in $\mathbb{Q}$ la successione ha intersezione vuota.

5. Estremo superiore ed estremo inferiore

Nel lavorare con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, ricorre frequentemente il problema di determinare la collocazione di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$, cioè di stabilire, casomai in maniera approssimativa, dove giaccia tale sottoinsieme. Una prima distinzione riguarda la proprietà di un insieme di possedere o non possedere numeri arbitrariamente grandi.

Definizione 5.1. *Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è:*
— limitato superiormente *se esiste un valore $\Lambda \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq \Lambda$ per ogni $x \in E$;*
— limitato inferiormente *se esiste un valore $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda \leq x \leq$ per ogni $x \in E$;*
— limitato *se è limitato superiormente ed inferiormente.*

Equivalentemente, si può affermare che un insieme è limitato se e solo se è contenuto in intervallo limitato. Analogamente, un insieme è limitato superiormente (inferiormente) se e solo se è contenuto in una semiretta del tipo $(-\infty, \Lambda]$ (del tipo $[\lambda, +\infty)$).

I valori Λ e λ espressi nella Definizione 5.1 sono rilevanti perché stimano la collocazione degli elementi di E.

Definizione 5.2. *Un valore $\Lambda \in \mathbb{R}$ è un* maggiorante *di E se si ha $x \leq \Lambda$ per ogni $x \in E$; un valore $\lambda \in \mathbb{R}$ è un* minorante *di E se si ha $\lambda \leq x$ per ogni $x \in E$.*

In sostanza, un maggiorante Λ è una stima per eccesso di tutti gli elementi dell'insieme E e un minorante λ ne è una stima per difetto. Se, in qualche modo, siamo in grado di procurarci un minorante λ ed un maggiorante Λ, sappiamo già che l'insieme E è un sottoinsieme dell'intervallo chiuso $[\lambda, \Lambda]$.

Per uno stesso insieme E, è possibile fornire stime diverse. Ad esempio, se

$$E := \left\{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \dots\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\right\},$$

sono vere le inclusioni

$$E \subset [-2, 3], \qquad E \subset [0, 1], \qquad E \subset [-100, 100],$$

ovvero $-2, 0, -100$ sono minoranti di E e $3, 1, 100$ ne sono maggioranti. Tra le tre, la seconda inclusione fornisce una informazione migliore delle altre, perché più precisa. Nell'Esempio specifico, è possibile migliorare ulteriormente la stima? E, in generale, dato un insieme, in quali casi è possibile trovare una stima ottimale?

Definizione 5.3. *Il valore $M \in \mathbb{R}$ è il* massimo di *E, e si scrive $M = \max E$, se*
(i) M è un maggiorante di E; (ii) M è un elemento di E.
Analogamente, il valore $m \in \mathbb{R}$ è il minimo di *E, e si scrive $M = \min E$, se*
(i) m è un minorante di E; (ii) m è un elemento di E.

Ad esempio, il valore 1 è il massimo dell'insieme $E = \{1/n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ dato che maggiora tutti gli elementi dell'insieme ed è della forma $1/n$ con $n = 1$. Se un insieme E ammette massimo M, tale valore è il migliore dei maggioranti, nel senso che è il più piccoli di questi: *se M' è un altro maggiorante di E, vale $M \leq M'$.* In definitiva, quindi, una stima ottimale dal basso e dall'alto di un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ esiste nel caso in cui l'insieme ammetta massimo e minimo. Ad esempio, l'insieme

$$E := \{\sin x \,:\, x \in [0, 2\pi]\}$$

ha come massimo il valore 1 e come minimo il valore -1. Infatti, da un lato, si tratta sicuramente di un maggiorante e di un minorante, rispettivamente; dall'altro, entrambi appartengono all'insieme in quanto $1 = \sin(\pi/2)$ e $-1 = \sin(3\pi/2)$.

Esistono però anche sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che, pur ammettendo maggioranti e minoranti, non hanno massimo o minimo, o nessuno dei due. Il caso più semplice è quello di un qualsiasi intervallo aperto (a, b) che non ha né massimo né minimo. In alternativa, si pensi all'insieme $E = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ che ha massimo, ma che non ha minimo. Quindi, dato un generico sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ non è detto che abbia senso scrivere $\max E$ e/o $\min E$. Bisogna, perciò, introdurre dei nuovi oggetti che siano ben definiti anche quando il massimo e/o il minimo non esistono.

DEFINIZIONE 5.4. *Sia $E \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.*
*Il valore $\Lambda \in \mathbb{R}$ è l'*estremo superiore di *E, e si scrive $\Lambda = \sup E$, se*
(i) Λ è un maggiorante di E, (ii) ogni maggiorante L di E verifica $\Lambda \leq L$.
*Analogamente, il valore $\lambda \in \mathbb{R}$ è l'*estremo inferiore di *E, e si scrive $\Lambda = \inf E$, se*
(i) λ è un minorante di E, (ii) ogni minorante ℓ di E verifica $\ell \leq \lambda$.

La proprietà (ii) dell'estremo superiore Λ garantisce che *non esiste una stima per eccesso migliore di* Λ: ogni altro possibile maggiorante dell'insieme, necessariamente è maggiore (o uguale) a Λ. Similmente, la proprietà (ii) dell'estremo inferiore λ garantisce che *non esiste una stima per difetto migliore di λ.* In altre parole, l'estremo superiore è il più piccolo dei maggioranti e l'estremo superiore è il più piccolo dei minoranti.

Dalle definizioni precedenti segue immediatamente che, se E ammette massimo M (o minimo m), questo valore è anche l'estremo superiore (o estremo inferiore) di E. Infatti, se $M = \max E$, dato che $M \in E$, si ha $M \leq L$ per ogni L maggiorante di E e quindi la condizione (ii) dell'estremo superiore è soddisfatta.

ESEMPIO 5.5. L'insieme $E := \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ non ammette minimo, ma ammette estremo inferiore: $\inf E = 0$. Infatti, 0 è chiaramente un minorante. Inoltre, se consideriamo un reale positivo $x > 0$, per la proprietà di Archimede, esiste $1/x < n$, cioè $1/n < x$. In particolare, nessun numero strettamente positivo è minorante di E e, di conseguenza, 0 è il più grande dei minoranti.

ESEMPIO 5.6. L'estremo superiore dell'insieme

$$E := \left\{ \frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

è 1. Infatti, dato che $n - 1 < n + 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $\dfrac{n-1}{n+1} < 1$, cioè 1 è un maggiorante di E. Inoltre, per $\Lambda < 1$ si ha

$$\frac{n-1}{n+1} \leq \Lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1-\Lambda)n \leq 1 + \Lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \leq \frac{1+\Lambda}{1-\Lambda}$$

Quindi, nessun numero strettamente minore di 1 è un maggiorante.

A prima vista passare dalla definizione di massimo/minimo a quella di estremo superiore/inferiore potrebbe somigliare ad un circolo vizioso. Infatti, la definizione di estremo superiore discende da questa strategia:

– dato l'insieme E, costruirne l'insieme F dei maggioranti,
– dichiarare $\sup E = \min F$.
Ma dato che non c'è garanzia che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ abbia minimo, chi assicura l'esistenza di $\min F$ (cioè di $\sup E$)?

Una conseguenza fondamentale degli assiomi di continuità dei numeri reali è che se esiste almeno un maggiorante (o minorante) dell'insieme E, allora *esiste sempre l'estremo superiore* (o *inferiore*). Lo stesso non vale nel caso dei numeri razionali: l'insieme $E := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ non ammette né estremo superiore né estremo inferiore in $\mathbb{Q}$.

TEOREMA 5.7. *Esistenza degli estremi superiore e inferiore.* *Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Allora*
(i) se E è limitato superiormente, esiste $\Lambda = \sup E \in \mathbb{R}$;
(ii) se E è limitato inferiormente, esiste $\lambda = \inf E \in \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Limitiamoci a considerare il caso dell'estremo superiore e supponiamo che l'insieme E non abbia massimo (in caso contrario, tale massimo sarebbe l'estremo superiore richiesto). Indichiamo con F l'insieme dei maggioranti di E.

Costruiamo una successione I_n di intervalli incapsulati costruiti iterando un procedimento di bisezione analogo a quello presentato in precedenza. Scelti $a_0 \notin F$ e $b_0 \in F$, siano

$$I_0 := [a_0, b_0] \qquad \text{e} \qquad \ell := b_0 - a_0.$$

Consideriamo il punto medio di I_0, cioè il numero $\xi_0 := \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ e poniamo

$$I_1 = [a_1, b_1] := \begin{cases} [a_0, \xi_0] & \xi_0 \in F, \\ [\xi_0, b_0] & \xi_0 \notin F, \end{cases}$$

In questo modo, l'intervallo I_1, di lunghezza $\ell/2$, ha il primo estremo fuori da F e il secondo estremo in F. Iterando la procedura, si ottiene una successione di intervalli incapsulati $I_n = [a_n, b_n]$, ciascuno di lunghezza $\ell/2^n$ e con la proprietà $a_n \notin F$, $b_n \in F$.

Per l'assioma degli intervalli incapsulati, l'intersezione di tali intervalli è non vuota, e per la proprietà di Archimede, tale intersezione è formata da un unico elemento, nel seguito indicato con η. Vogliamo mostrare che η è l'estremo superiore cercato.

(i) *η è un maggiorante.* Infatti, per ogni $x \in E$, si ha $x < b_n$ e, di conseguenza,

$$x - \eta \le b_n - \eta < \frac{\ell}{2^n} \qquad \forall\, n.$$

Procedendo come nella dimostrazione dell'implicazione (10), ne segue la disuguaglianza $x - \eta \le 0$, cioè $x \le \eta$.

(ii) *η è il più piccolo dei maggioranti.* Per ogni maggiorante θ, dato che $a_n \notin F$, si ha $a_n < \theta$ per ogni n. Quindi, valgono

$$\eta - \theta \leq \eta - a_n < \frac{\ell}{2^n} \qquad \forall\, n,$$

da cui si deduce $\eta \leq \theta$. □

Nel caso in cui l'insieme dei maggioranti e/o quello dei minoranti sono vuoti, convenzionalmente, si estende la nozione di estremo superiore ed inferiore:
– se non esistono maggioranti, E è illimitato superiormente, si scrive $\sup E = +\infty$;
– se non esistono minoranti E è illimitato inferiormente, si scrive $\inf E = -\infty$.

I simboli $+\infty$ e $-\infty$ non corrispondono a nessun numero reale; bisogna quindi notare che le espressioni $\sup E = +\infty$ e $\inf E = -\infty$ hanno un significato ben diverso rispetto alle usuali uguaglianze di numeri reali.

Le definizioni di maggiorante, minorante, massimo, minimo, estremo superiore/inferiore, limitato superiormente/inferiormente, illimitato superiormente/inferiormente si basano sull'ordinamento di $\mathbb{R}$, cioè sul simbolo $\leq$ (e varianti). Quindi non hanno estensioni ai sottoinsiemi del piano $\mathbb{R}^2$, dello spazio $\mathbb{R}^3$ o di qualsivoglia altro oggetto privo di ordine!

Altre partenze (ma con lo stesso punto di arrivo). Come si è visto, assumendo il Postulato degli intervalli incapsulati e la proprietà di Archimede, si dimostra la validità del Teorema 5.7, relativo all'esistenza dell'estremo superiore ed inferiore.

Si può anche scegliere una strada diversa, non supporre valide *a priori* le affermazioni relative agli intervalli incapsulati e la proprietà archimedea e considerare direttamente la tesi del Teorema 5.7 come un assioma

> Postulato dell'estremo superiore. *Ogni insieme superiormente limitato, ammette estremo superiore.*

In questo caso, *è possibile dedurre il Postulato degli intervalli incapsulati e l'Assioma di Archimede come conseguenza dell'assunzione dell'esistenza dell'estremo superiore.* Infatti, se non valesse la proprietà di Archimede, l'insieme $\mathbb{N}$ sarebbe superiormente limitato ed ammetterebbe quindi un estremo superiore Λ, che dovrebbe necessariamente essere naturale. Quindi, esisterebbe $\Lambda \in \mathbb{N}$ tale che $n \leq \Lambda$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, in contraddizione con il fatto che $\Lambda + 1$ è naturale ed è più grande di Λ.

Per dimostrare la proprietà relativa agli intervalli incapsulati, si consideri una sequenza di intervalli chiusi e limitati $I_n = [a_n, b_n]$ tali che

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

Gli insiemi $A = \{a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots\}$ e $B = \{b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq b_{n+1} \leq \dots\}$ sono limitati e quindi ammettono estremo superiore ed inferiore. Dato che tutti gli elementi di A sono minori o uguali di tutti gli elementi di B, si ha $\sup A \leq \inf B$. Inoltre, dalle definizioni di estremo superiore ed inferiore, si deduce

$$[\sup A, \inf B] \subseteq I_n \qquad\qquad \forall\, n.$$

Quindi, l'intersezione degli intervalli incapsulati è non vuota.

In quello che segue, quindi, possiamo fare riferimento al Postulato degli intervalli incapsulati e l'Assioma di Archimede o al Postulato dell'estremo superiore in maniera del tutto equivalente. A seconda del problema considerato, potremo utilizzare uno o l'altro come punto di partenza per dedurre nuove proprietà relative all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Senza offesa per nessuno.

CAPITOLO 2

Funzioni: anno zero

1. Ingredienti di base

In tutti i campi della scienza compaiono, in modo del tutto naturale, oggetti chiamati *funzioni*: la pressione di un gas ideale è funzione della densità e della temperatura, la posizione di una particella in movimento è funzione del tempo, il volume e la superficie di un cilindro sono funzioni del raggio e dell'altezza, etc. etc.. In generale, quando certe quantità $a, b, c, \dots$, dette *variabili dipendenti*, sono determinate da altre quantità $x, y, z, \dots$, dette *variabili indipendenti*, si dice che $a, b, c, \dots$ "sono funzioni di" $x, y, z, \dots$ o, in modo equivalente che $a, b, c, \dots$ "dipendono da" $x, y, z, \dots$. L'idea è semplice: cambiando il valore delle variabili indipendenti, cambia il valore delle variabili dipendenti.

Ecco alcuni esempi tanto per cominciare.

i. L'area A di un quadrato di lato ℓ è data da $A = \ell^2$, quindi la variabile dipendente *area* A è funzione della variabile indipendente *lato* ℓ.
ii. Il Teorema di Pitagora afferma: *la lunghezza* ℓ *dell'ipotenusa è pari alla radice quadrata della somma dei quadrati delle lunghezze* a *e* b *dei cateti*, o, in formule, $\ell = \sqrt{a^2 + b^2}$. In questo caso, la lunghezza dell'ipotesa è una funzione delle lunghezze dei cateti: la variabile dipendente è ℓ, mentre le variabili indipendenti sono a e b.
iii. Esistono anche oggetti che associano ad una sola variabile indipendente t, due variabili dipendenti x e y. Ad esempio, la funzione

$$x = t + 1, \quad y = 2 - t^3.$$

Interpretando x e y come coordinate di un punto P nel piano e t come il tempo, queste equazioni descrivono la posizione di P al tempo t, cioè il *moto* del punto P.

In generale, una funzione è una legge che associa ad ogni dato valore di una variabile (indipendente) un unico valore di un'altra variabile (dipendente). In termini più informatici, si può pensare alla variabile indipendente come `Input` della funzione e alla variabile dipendente come `Output`.

$$\texttt{Input} \longrightarrow \boxed{\textsf{Funzione}} \longrightarrow \texttt{Output}$$

Nella prima parte di queste Note, approfondiremo il caso delle *funzioni che associano ad un numero reale un altro numero reale* (vedi esempio **i.**). In questa situazione, si usa la notazione

$$f\,:\,I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R},$$

che esprime che la funzione f è definita per valori $x\in I$ dove I è un assegnato sottoinsieme della retta reale $\mathbb{R}$ e che la f trasforma x nel valore $y=f(x)$ di $\mathbb{R}$. Quindi, per definire una funzione occorre conoscere:
– i valori della variabile indipendente per cui la funzione f è considerata (l'insieme I);
– in quale insieme "vive" la variabile dipendente (qui l'insieme dei numeri reali);
– la regola definita dalla funzione f.

Volete qualche altro esempio? Eccovene un paio:

$$f(x)=x^2 \qquad x\in\mathbb{R} \qquad \text{oppure} \qquad f(x)=\sqrt{1-x^2} \qquad -1\le x\le 1$$

Frequentemente useremo i seguenti vocaboli, con cui ci si familiarizza col tempo.

Piccolo glossario per le funzioni

x: variabile indipendente
y: variabile dipendente
I: dominio di definizione (o campo di esistenza)
$\mathbb{R}$ (di arrivo): codominio
$f(x)$: immagine di x (o trasformato di x)
x: (una) pre-immagine, o contro-immagine, di $f(x)$
$f(I)=\{y\in\mathbb{R}\,:\,y=f(x)\text{ per qualche }x\in I\}$:
insieme immagine o immagine (di I tramite f)[1]

Osservazione 1.1. L'assegnazione di una funzione include anche la definizione del dominio della funzione. Funzioni con la stessa espressione analitica, ma differente dominio di definizione sono da considerarsi funzioni diverse! Ad esempio, la funzione $f(x)=x^2$ per $0<x<2$ non coincide con la funzione $g(x)=x^2$ per $x\in\mathbb{R}$, dato che il loro dominio di definizione è diverso.

Nell'esempio appena descritto, però, le funzioni f e g coincidono in $(0,2)$, cioè nell'insieme in cui è definita la funzione f. In questo caso, si utilizza la definizione seguente.

Definizione 1.2. Restrizione ed estensione. *La funzione $f\,:\,I_f\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una* restrizione *della funzione $g\,:\,I_g\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (e g è una* estensione *di f) se l'insieme di*

[1] In inglese, si parla di *range* della funzione f.

definizione di g contiene quello di f e le due funzioni coincidono dove sono definite entrambe, cioè se

$$I_f \subset I_g \qquad\qquad e \qquad\qquad f(x) = g(x) \qquad \forall\, x \in I_f.$$

Usualmente, se una funzione viene assegnata dandone l'espressione analitica, ma senza specificarne l'insieme di definizione, si intende che la funzione è considerata nell'insieme più grande in cui le operazioni richieste sono lecite. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3 + 1$ si considera definita in $I = \mathbb{R}$, mentre la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è definita in $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Grafico di funzioni. Per individuare proprietà delle funzioni è utile realizzarne una rappresentazione grafica: il grafico della funzione f è il sottoinsieme del piano

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in I,\, y = f(x)\}.$$

Per iniziare, vediamo alcuni esempi.

(i) y è una "funzione affine" di x, cioè la funzione f è un polinomio di grado 1:

$$f(x) = ax + b \qquad \text{per qualche } a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Come è noto dalla geometria elementare, il grafico è una retta nel piano.

(ii) y è inversamente proporzionale a x,

$$y = \frac{1}{x}.$$

Questa funzione è definita per $x \neq 0$ dato che la divisione per zero non ha senso. Il grafico rappresenta una *iperbole (rettangolare)*.

(iii) y è il quadrato di x,

$$f(x) = x^2$$

come è ben noto questa funzione ha per grafico una parabola (vedi Fig.1(a)). Lo stesso vale per le funzioni del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

(iv) y è uguale a $|x|$. Dato che, per definizione

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

il grafico della funzione è composto da due semirette (vedi Fig.1(b)).

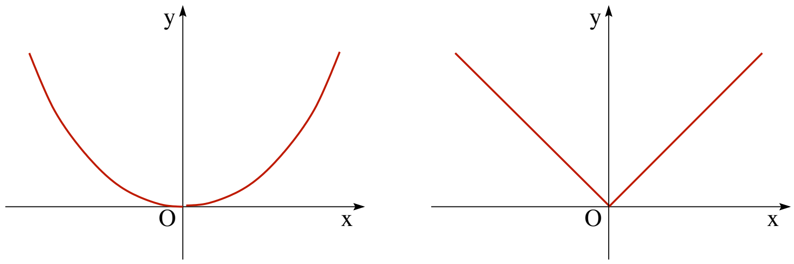

FIGURA 1. (a) La parabola $y = x^2$; (b) Il modulo: $y = |x|$.

Polinomi. Il tipo più semplice di funzione si ottiene utilizzando le sole operazioni di somma e moltiplicazione: un polinomio (di grado n) è una funzione della forma

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad a_n \neq 0.$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (con $a_n \neq 0$) sono $n+1$ numeri reali assegnati. Quindi $y = 3x+1$, $y = x^2 - 2x + 5$, $5x^{47} + 47x^5$ sono esempi di polinomi.

ESERCIZIO 1.3. *Disegnare i grafici delle seguenti funzioni*

$$f(x) = 1, \qquad f(x) = x, \qquad f(x) = 2x + 1, \qquad f(x) = 2x^2 + x + 1.$$

E' una buona idea quella di sperimentare al calcolatore come siano fatti i grafici di polinomi. In particolare è interessante contare il "numero di oscillazioni" delle funzioni al variare del grado, dove per "numero di oscillazioni" si intende il numero delle zone in cui il grafico "sale" e di quelle in cui "scende". Qual è la regola generale?

Funzioni razionali. I rapporti di polinomi sono dette funzioni razionali

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} \quad \text{con } a_i, b_j \in \mathbb{R}, \quad (b_j \text{ non tutti nulli})$$

e *sono definite per tutti i valori di x per cui il denominatore è diverso da zero.* Per quanto riguarda gli zeri della funzione, questi sono tutti e soli gli zeri del polinomio a numeratore (l'unico modo per ottenere zero da un rapporto è che il numeratore sia zero). Lo studio del segno si traduce invece in un sistema di disequazioni.

Una buona classe per iniziare lo studio delle funzioni razionali è

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Ad esempio, consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}.$$

L'insieme di definizione è $I = \{x : x \neq -1\}$, inoltre la funzione è positiva per $x > 1$ e per $x \leq -3/2$ e negativa nel resto dell'insieme. Il grafico è in Figura 2(a).

Un altro esempio di funzione razionale facile è $f(x) = 1/x^2$ (vedi Figura 2(b)).

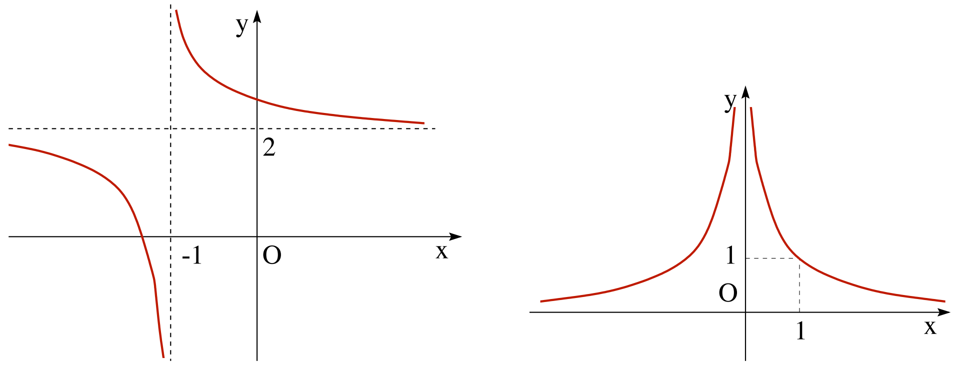

FIGURA 2. (a) La funzione $y = (2x + 3)/(x + 1)$; (b) la funzione $y = 1/x^2$.

Funzioni trigonometriche. Non è possibile in poche righe ricordare tutto il necessario sulle funzioni trigonometriche. Qui ci limitiamo alle proprietà principali. Le funzioni trigonometriche di base sono $\sin x$ e $\cos x$ le cui proprietà fondamentali sono:
– entrambe sono definite per ogni valore reale x;
– $\cos 0 = 1$ e $\sin 0 = 0$;
– per ogni $x \in \mathbb{R}$, si hanno $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ e $\sin(x + 2\pi) = \sin x$;
– per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale la relazione $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
– per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valgono le formule di somma e sottrazione

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

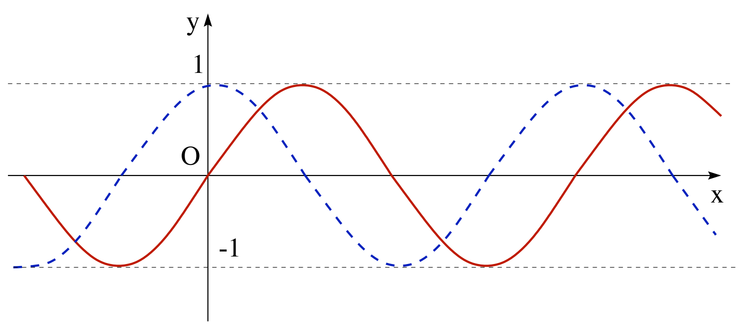

FIGURA 3. Il grafico della funzione $\sin x$ (linea continua) e della funzione $\cos x$ (linea tratteggiata).

Dato che $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, è sempre vero che $|\sin^2 x|, |\cos^2 x| \leq 1$ e quindi

$$|\sin x| \leq 1, \qquad |\cos x| \leq 1 \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 1.4. *Dimostrare che* $|\sin x| \le |x|$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.5. *Dedurre, dalle formule di somma e sottrazione, la formula*

$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Soluzione. Poniamo $\xi = \frac{x+y}{2}$ e $\eta = \frac{x-y}{2}$. Allora $x = \xi + \eta$ e $y = \xi - \eta$. Dunque

$$\sin x - \sin y = \sin(\xi+\eta) - \sin(\xi-\eta) = \sin\xi\cos\eta + \cos\xi\sin\eta - \sin\xi\cos\eta + \cos\xi\sin\eta = 2\cos\xi\sin\eta,$$

e ricordando la definizione di ξ ed η si giunge alla conclusione.

Tramite le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ si definiscono le funzioni tangente e cotangente:

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{e} \qquad \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Dalla definizione e dalle proprietà di seno e coseno, discende che $\tan x$ è definita per $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ e $\cot x$ è definita per $x \ne k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$.

2. Operazioni elementari su grafici

Una volta noto il grafico di una funzione f è possibile, a partire da questo, ricostruire il grafico di altre funzioni g che si ottengano dalla prima per via elementare. Vediamo alcuni esempi significativi, tenendo conto che, qui, l'unica maniera per capire è *sperimentare* (anche usando un computer o una calcolatrice grafica, se possibile).

(i) *Traslazioni.* Il grafico di $g(x) = f(x) + c$ dove $c \in \mathbb{R}$ è dato da una traslazione in verticale del grafico di f della quantità c (la traslazione sarà quindi verso l'alto se $c > 0$ e verso il basso se $c < 0$).

Il grafico di $g(x) = f(x + c)$ dove $c \in \mathbb{R}$ è dato da una traslazione in orizzontale di $-c$ del grafico di f. Nota bene! La traslazione è di $-c$, quindi è verso sinistra se $c > 0$ e verso destra se $c < 0$.

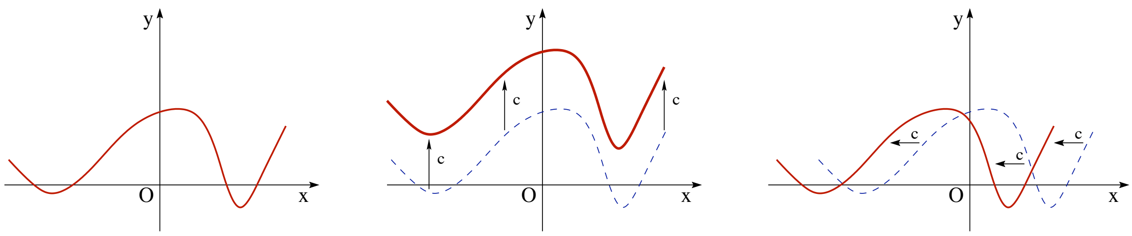

Figura 4. I grafici di (a) $y = f(x)$, (b) $y = f(x) + c$; e (c) $y = f(x + c)$.

(ii) *Dilatazioni/Compressioni.* Il grafico di $g(x) = kf(x)$ è ottenuto dilatando la variabile dipendente di un fattore k, il grafico è pertanto dilatato nella direzione verticale. Il grafico di $g(x) = f(kx)$ è ottenuto dilatando la variabile indipendente di un fattore

$1/k$, quello che per la funzione f accadeva in x ora per la funzione g accade in x/k. Questo vuol dire che se $k > 1$ il grafico risulta compresso in orizzontale verso l'asse y, mentre se $k < 1$ il grafico risulta dilatato. Un esempio? Fate il grafico di

$$f(x) = |x| - 1, \qquad g(x) = |2x| - 1, \qquad h(x) = \left|\frac{x}{2}\right| - 1.$$

Visto che ci siete, fate anche $l(x) = 2\big||x| - 1\big|$ e $m(x) = \frac{1}{2}\big||x| - 1\big|$.

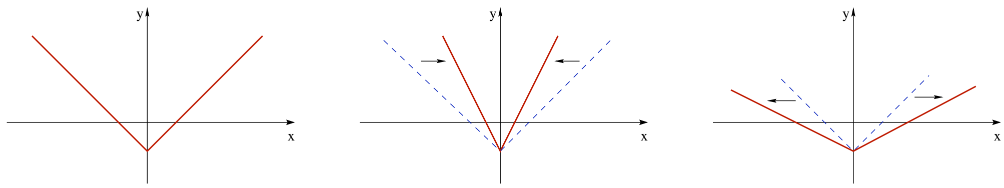

FIGURA 5. I grafici di (a) $y = f(x) = |x| - 1$, (b) $g(x) = |2x| - 1$, (c) $h(x) = \left|\frac{x}{2}\right| - 1$.

ESERCIZIO 2.1. *Disegnare i grafici delle funzioni*

$$f(x) = \big||x| - 1\big|, \qquad g(x) = \big||3x| - 1\big|, \qquad h(x) = \frac{1}{3}\big||x| - 1\big|.$$

(iii) *Somma/Sottrazione.* Dati i grafici di f e g è possibile stabilire un andamento qualitativo anche delle funzioni $h = f + g$ e $l = f - g$. Basta disegnare i due grafici di f e g sullo stesso piano (x, y) e poi calcolare punto per punto la somma e la differenza. Nel caso della differenza, il significato del grafico è di "distanza" con segno (cioè l è positiva se f è sopra g e negativa se f è sotto g) tra i punti, aventi stessa ascissa, dei grafici delle due funzioni. Quindi la "distanza" qui è calcolata in verticale (non è la distanza nel piano...).

(iv) *Passaggio al reciproco.* Dato il grafico della funzione f è possibile anche determinare i grafici delle funzioni $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ e $h(x) = f(1/x)$. Come si dovrebbe essere capito dai casi precedenti, nel primo caso si ottiene una trasformazione "in verticale" (nel senso della variabile dipendente y), mentre nel secondo "in orizzontale" (nel senso della variabile dipendente x).

Il grafico di g si ottiene dalla f notando che i valori che vengono mandati da f vicino a zero sono trasformati per g in valori grandi, mentre i valori che la f trasforma in valori grandi, sono mandati da g in zero. I valori che vanno in ± 1 rimangono gli stessi. Un grafico di quel che fa la trasformazione $t \to s = 1/t$ dall'asse t all'asse s aiuta a capire cosa sta succedendo.

Per quanto riguarda il grafico della funzione h, questa volta l'inversione è compiuta sulla variabile indipendente x, quindi l'inversione è in orizzontale.

(v) *Modulo di una funzione.* Una classe significativa è quella delle funzioni della forma $g(x) = |f(x)|$ dove si suppone noto il grafico della funzione f. Dato che il modulo $|\cdot|$ trasforma un numero in sé stesso se è positivo, e nel suo opposto se è negativo, per fare il grafico di g basta lasciare invariata la parte del grafico di f che corrisponde a valori positivi della variabile dipendente, cioè la parte che è sopra l'asse delle x, e ribaltare attorno all'asse x la parte del grafico che si trova al di sotto.

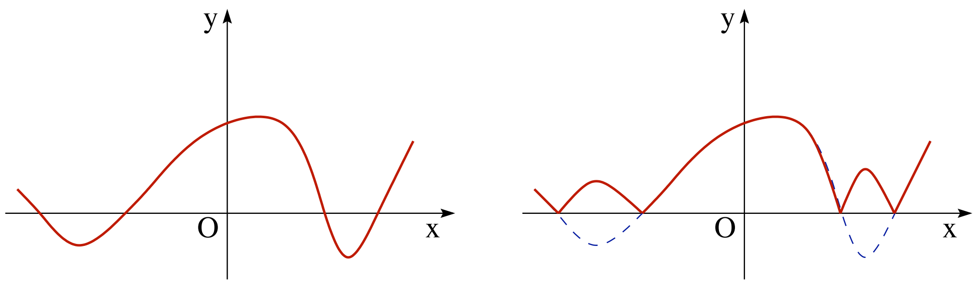

FIGURA 6. I grafici di (a) $y = f(x)$, (b) $y = |f(x)|$.

(vi) *Parte positiva e parte negativa di una funzione.* Data una funzione f, la funzione $\max\{f(x), 0\}$ è detta parte positiva di f e la funzione $\max\{-f(x), 0\}$ è detta parte negativa di f. Il grafico della prima delle due si ottiene molto facilmente a partire da quello della f: coincide con quest'ultimo dove $f(x) \geq 0$ e, in quel che resta, coincide con l'asse delle x. Il grafico della parte negativo richiede un piccolo sforzo in più: prima si ribalta il grafico della funzione f attorno all'asse x (cioè si disegna il grafico della funzione $-f$) e poi si procede come per la parte positiva. Si noti, in particolare, che sia il grafico della parte positiva che quello della parte negativa giacciono nel semipiano $y \geq 0$.

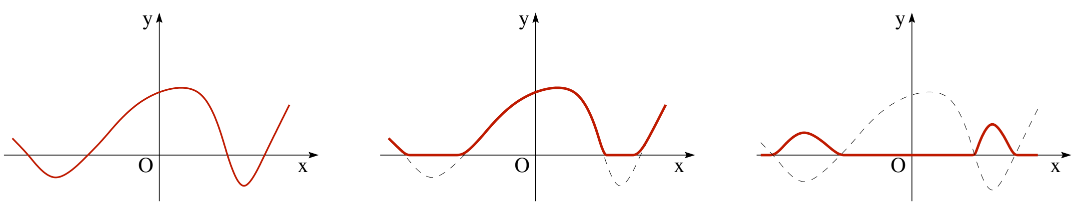

FIGURA 7. I grafici di (a) $y = f(x)$, (b) $y = \max\{f(x), 0\}$, (c) $y = \max\{-f(x), 0\}$,.

Simmetrie di grafici. Capita spesso che le funzioni che si studiano abbiano della *simmetrie*, cioè abbiano la proprietà che il loro grafico rimane immutato quando vengono compiute certe trasformazioni. Ad esempio, il grafico di una funzione costante, dato che è una retta orizzontale, rimane invariato se viene traslato in orizzontale. Se si riconosce una simmetria di una funzione, lo studio è in genere semplificato, perché il grafico può essere determinato studiandone semplicemente una parte e poi applicando una trasformazione opportuna. Vediamo rapidamente i principali tipi di simmetria.

Se il grafico di una funzione f è simmetrico rispetto all'asse y si dice che la funzione è pari. Analiticamente, questa proprietà corrisponde a

$$\text{funzione pari:} \qquad f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in I.$$

Ad esempio le funzioni $y = x^2$, $y = |x|$ sono funzioni pari.

Se il grafico è simmetrico rispetto all'origine, la funzione è dispari

$$\text{funzione dispari:} \qquad f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in I.$$

Ad esempio, le funzioni $y = x^3$ e $y = 1/x$ sono dispari.

Le funzioni pari più semplici sono i polinomi che includano solo potenze pari di x. Le funzioni dispari più semplici sono i polinomi che includano solo potenze dispari di x. La funzione $\cos x$ è pari: sono pari quindi somme, differenze e prodotti di $\cos x$. La funzione $\sin x$ è dispari. E' vero che somme/prodotti di $\sin x$ sono dispari?

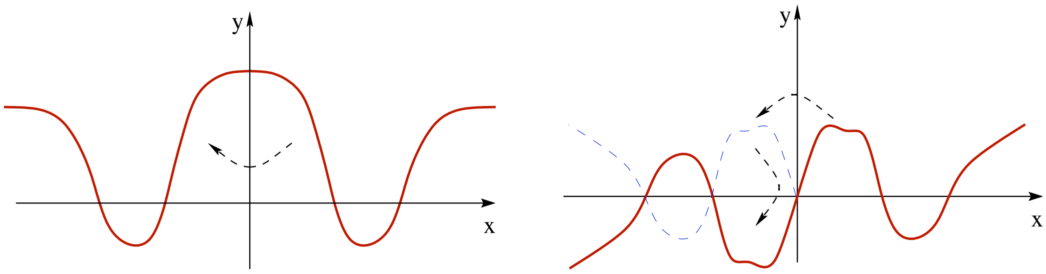

Figura 8. (a) una funzione pari, (b) una funzione dispari.

Una funzione $y = f(x)$ si dice periodica se

$$\text{funzione periodica:} \qquad \exists T > 0 \text{ tale che } \forall x \quad f(x+T) = f(x).$$

Qualora esista, il più piccolo valore T per cui vale questa proprietà è il periodo della funzione f. Graficamente questa proprietà corrisponde al fatto che il grafico può essere ricostruito con "copia/incolla": si determina il grafico della funzione in un intervallo di lunghezza T e poi lo si riproduce a destra e a sinistra dell'intervallo. Esempi di funzioni periodiche sono le funzioni trigonometriche: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x,$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \qquad \cot(x + \pi) = \cot x.$$

Tanto per provare, verifichiamo la periodicità di $\tan x$:

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x \cos\pi + \cos x \sin\pi}{\cos x \cos\pi - \sin x \sin\pi} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

ESERCIZIO 2.2. *Qualcuna delle funzioni seguenti è pari/dispari/periodica?*

$$\cos(x^2), \qquad |\cos x|, \qquad x|x|.$$

Soluzione. La prima funzione è pari, infatti $f(-x) = \cos((-x)^2) = \cos(x^2) = f(x)$. Anche la seconda è pari (verificare!). E' anche periodica di periodo π, infatti

$$|\cos(x+\pi)| = |\cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi)| = |-\cos(x)| = |\cos x|.$$

La terza funzione è dispari: $f(-x) = -x|-x| = -x|x| = -f(x)$.

Un altro esempio (meno frequente) di funzione periodica è la *parte frazionaria*. Sia

$$\textsf{parte intera di } x: \quad [x] := z \in \mathbb{Z},$$

dove z è l'unico intero per cui $z \le x < z+1$. Allora la funzione

$$\textsf{parte frazionaria (o mantissa) di } x: \quad \{x\} := x - [x]$$

è una funzione periodica, con periodo 1 (verificare!).

3. Funzioni invertibili e funzioni monotòne

Data $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dato $y \in \mathbb{R}$, un problema tipico è determinare se ci sono (e quante) soluzioni di $f(x) = y$. In altri termini, data y si vuole sapere quante sono le sue pre-immagini tramite f. Per definizione di insieme immagine (vd. il "Piccolo Glossario per Funzioni"), il problema ammette almeno una soluzione se e solo se $y \in f(I)$.

Problema: sia $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata,

dato $y \in \mathbb{R}$, quante soluzioni esistono dell'equazione $f(x) = y$?

DEFINIZIONE 3.1. *Una funzione f è* iniettiva *se manda valori di x diversi in valori y diversi, ossia*

$$f \text{ è iniettiva se} \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

In parole povere, se l'equazione $f(x) = y$ ammette sempre non più di una soluzione la funzione f si dice *iniettiva* (o *uno a uno*). Potrebbero però esserci dei valori y per cui il problema non ha soluzione.

Graficamente, l'iniettività corrisponde al fatto che *rette parallele all'asse delle x intersecano il grafico della funzione f al più una volta.* Ad esempio, la funzione x è iniettiva, mentre le funzioni x^2 e $|x|$ non lo sono.

Vediamo, in alcuni esempi concreti, come verificare se una funzione è iniettiva. La strategia pratica è supporre che valga l'uguaglianza $f(x_1) = f(x_2)$ per x_1, x_2 generici, e domandarsi se ne segue $x_1 = x_2$:

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \overset{?}{\Rightarrow} \qquad x_1 = x_2$$

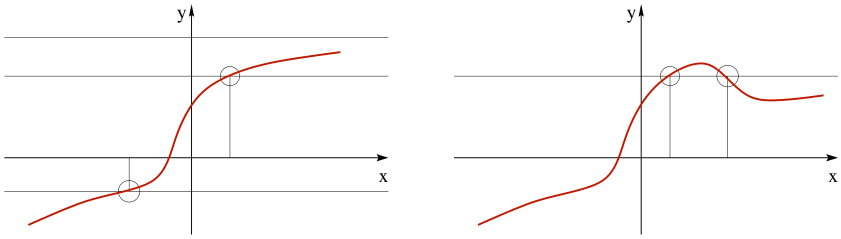

Figura 9. (a) una funzione iniettiva, (b) una funzione non iniettiva.

Esempio 3.2. Consideriamo la funzione $f(x) = 3x - 2$ e supponiamo che esistano x_1, x_2 tale che $f(x_1) = f(x_2)$. Allora

$$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \iff 3x_1 = 3x_2 \iff x_1 = x_2,$$

quindi la funzione è iniettiva. Alla stessa conclusione si giunge disegnando il grafico della retta $y = 3x - 2$ e osservando che, dato che la retta è obliqua, la proprietà geometrica dell'iniettività è soddisfatta.

Esempio 3.3. Consideriamo

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2} \qquad I = \{x \neq -2\}.$$

Studiamone l'iniettività: siano $x_1, x_2 \in I$ tali che

$$\begin{aligned}\frac{x_1+1}{x_1+2} = \frac{x_2+1}{x_2+2} \quad &\iff \quad (x_2+2)(x_1+1) = (x_2+1)(x_1+2)\\ &\iff \quad 2x_1 + x_2 = 2x_2 + x_1 \quad \iff \quad x_1 = x_2.\end{aligned}$$

Quindi la funzione è iniettiva.

Esempio 3.4. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 + x$. Pensando al suo grafico, è evidente che non si tratta di una funzione iniettiva, ma come si può riconoscere questo fatto direttamente dai conti algebrici? Procediamo come in precedenza:

$$x_1^2 + x_1 = x_2^2 + x_2 \iff (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) = 0.$$

Se supponiamo $x_1 \neq x_2$, allora otteniamo $x_1 + x_2 + 1 = 0$, da leggersi come una condizione su x_1 e x_2 che garantisce $f(x_1) = f(x_2)$. Ad esempio, scegliendo $x_1 = -1$ e $x_2 = 0$, otteniamo

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) = 0,$$

quindi la funzione non è iniettiva.

Se una funzione è iniettiva, per tutti i valori y per cui l'equazione $y = f(x)$ ha soluzione è possibile associare un <u>unico</u> valore x dato proprio dalla soluzione dell'equazione $f(x) = y$. In altre parole, se una funzione è iniettiva è possibile definire una nuova funzione che permette di “tornare indietro”, cioè che associa ad ogni y dell'insieme immagine, l'unico valore x di cui è immagine.

Definizione 3.5. *Data una funzione f iniettiva, la funzione $f^{-1} : f(I) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che gode della proprietà*

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall y \in f(I),\, x \in I,$$

si dice funzione inversa di f. *La funzione f si dice* invertibile.

Per determinarne l'inversa f^{-1} dobbiamo, sostanzialmente, esplicitare la funzione in termini della variabile y, cioè, a partire dall'espressione $y = f(x)$, arrivare ad una espressione *equivalente* della forma $x = f^{-1}(y)$.

Esempio 3.6. Nel caso della funzione $f(x) = 3x - 2$, si ha

$$y = 3x - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x = y + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{y+2}{3}.$$

La funzione inversa è $f^{-1}(y) = \dfrac{y+2}{3}$.

Esempio 3.7. Per la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2} \qquad I = \{x \neq -2\}.$$

si ha

$$y = \frac{x+1}{x+2} \iff xy + 2y = x + 1 \iff x(y-1) = 1 - 2y \iff x = \frac{1-2y}{y-1}.$$

Tale espressione ha senso solo per $y \neq 1$. In effetti, nel caso $y = 1$, si trova la relazione $x + 1 = x + 2$ cioè $1 = 2$ che è falsa, quindi $1 \notin f(I)$. La funzione inversa è definita in $\{y \neq 1\}$ ed è data da

$$f^{-1}(y) = \frac{1-2y}{y-1}.$$

Conoscendo il grafico di una funzione f, si può sempre ottenere il grafico dell'inversa f^{-1}. Infatti, dato che $y = f(x)$ se e solo se $x = f^{-1}(y)$, si ha $(x, f(x)) = (f^{-1}(y), y) \in \Gamma$; quindi il grafico della funzione inversa si ottiene scambiando il ruolo dell'asse x e dell'asse y, ossia ribaltando il grafico attorno alla retta $y = x$ (vedere Figura 10).

Funzioni monotòne. Una funzione $y = f(x)$ il cui valore immagine cresce se cresce la variabile indipendente, cioè tale che, per ogni $x, x' \in I$,

$$x < x' \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) < f(x')$$

si dice monotòna strettamente crescente in I o, più semplicemente, strettamente crescente in I. Analogamente, se, per ogni $x, x' \in I$,

$$x < x' \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) > f(x'),$$

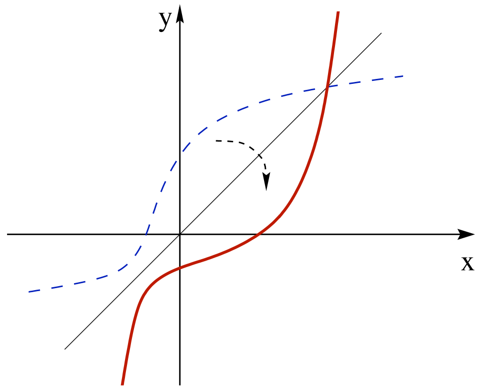

FIGURA 10. Il grafico della funzione inversa di una funzione assegnata.

la funzione è **monotòna strettamente decrescente** o semplicemente **strettamente decrescente**. Equivalentemente, si può scrivere

$$f \text{ strettamente crescente} \iff \big[f(x) - f(x')\big](x - x') > 0 \qquad \forall x \neq x'$$
$$f \text{ strettamente decrescente} \iff \big[f(x) - f(x')\big](x - x') < 0 \qquad \forall x \neq x'$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $y = x^n$ ristretta a $x \geq 0$ è una funzione monotòna strettamente crescente (come si è visto nella sezione delle disequazioni). Più precisamente, per n dispari, la funzione x^n è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ (quindi anche per i negativi), mentre per n pari la funzione x^n non è monotòna in $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3.8. *Dimostrare che se f e g sono funzioni strettamente crescenti allora anche la funzione $f + g$ è strettamente crescente. E' vero che anche la funzione fg è strettamente crescente?*

Soluzione. Per ipotesi, se $x < y$, allora $f(x) < f(y)$ e $g(x) < g(y)$. Quindi, sommando i termini di destra e i termini di sinistra, si ottiene

$$f(x) + g(x) < f(y) + g(y) \qquad \forall\, x, y \quad x < y.$$

La risposta alla domanda finale è "NO". Basta infatti considerare $f(x) = g(x) = x$, che è strettamente crescente, mentre $f(x)g(x) = x^2$ non lo è. Quale ipotesi aggiuntiva occorre per dedurre che il prodotto di funzioni strettamente crescenti è crescente?

Chiaramente valgono le implicazioni

$$f \textit{ strettamente monotòna} \quad \Rightarrow \quad f \textit{ iniettiva} \quad \iff \quad f \textit{ invertibile}$$

Ad esempio, le funzioni x^n per $x \geq 0$ e n pari e x^n per $x \in \mathbb{R}$ e n dispari sono funzioni invertibili.

OSSERVAZIONE 3.9. La monotonia di una funzione f ne garantisce l'invertibilità senza passare per la determinazione della formula per la funzione inversa: la funzione

f^{-1} c'è, ma non si vede! Ad esempio, per ogni n dispari, la funzione $f(x) = x + x^n$ è una funzione strettamente crescente, dato che è somma di funzioni strettamente crescenti. Quindi è anche una funzione invertibile.

Se la funzione f è strettamente crescente/decrescente, anche la sua inversa lo è. Infatti, siano $y = f(x)$ e $y' = f(x')$, allora $x = f^{-1}(y)$ e $x' = f^{-1}(y')$ e quindi

$$\big[f(x) - f(x')\big](x - x') = (y - y')\big[f^{-1}(y) - f^{-1}(y')\big].$$

Quindi il segno del secondo membro è lo stesso del primo, ossia le funzioni f e f^{-1} hanno lo stesso tipo di monotonia.

Nel caso in cui, nella definizione di monotonía, il simbolo di disequazione $<$ venga sostituito con la versione indebolita $\leq$ e $>$ con $\leq$ si parla di funzioni non decrescenti o non crescenti: Attenzione però al fatto che le funzioni non crescenti e quelle non decrescenti possono essere non iniettive, e quindi non invertibili (ad esempio, le funzioni costanti!).

4. Classi di funzioni più o meno comuni

Radici n-esime. Sia n un numero naturale $n \geq 2$. Dato che $y = x^n$ è strettamente crescente per $x \geq 0$, essa è iniettiva e quindi invertibile. La sua inversa si indica con

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}.$$

Per definizione questa radice è sempre non negativa.

Per n dispari, però, la funzione x^n è strettamente crescente per tutti i valori $x \in \mathbb{R}$ (quindi anche per i negativi) e, di conseguenza, *per n dispari, $\sqrt[n]{x}$ è definita per tutti i valori della x*; in questo caso $\sqrt[n]{x}$ è negativa per x negativa.

Più in generale, data una funzione g, possiamo considerare funzioni della forma

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}.$$

Nel caso in cui n sia pari, una funzione di questo genere è definita solo per i valori della x per cui $g(x) \geq 0$. Ad esempio, dove è definita la funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$? Facile. Basta imporre la condizione $1 - x^2 \geq 0$, quindi per $x \in [-1, 1]$. Invece la funzione $h(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$ è definita per ogni valore x.

Inverse delle funzioni trigonometriche. Le funzioni trigonometriche sono periodiche, quindi non iniettive e non invertibili se considerate in tutto l'insieme in cui sono definite. Opportune restrizioni di queste funzioni sono però monotone e quindi invertibili. Vediamole in dettaglio.

Funzione arcoseno. La funzione $f(x) = \sin x$ è una funzione periodica su $\mathbb{R}$, quindi ad ogni elemento della sua immagine corrispondono infinite pre-immagini. Ad esempio,

$f^{-1}(1) = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Perciò la funzione $\sin x$ non è invertibile. Invece, la restrizione di $\sin x$ all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è una funzione crescente e quindi anche invertibile. Questa inversa si chiama (funzione) arcoseno e si indica con $\arcsin x$. Il dominio dell'arcoseno è $[-1, 1]$ e l'insieme immagine è $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\arcsin \, : \, [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Infine, dato che la funzione $\sin x$ è crescente nell'intervallo in cui la stiamo considerando, anche $\arcsin x$ è crescente.

Allo stesso modo si sarebbe potuto decidere di invertire la restrizione della funzione $\sin x$ ad un altro intervallo, ad esempio in $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$. La scelta dell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è puramente convenzionale, per questo, qualche volta, si dice che $\arcsin x$ è il *valore principale dell'arcoseno.*

Funzione arcocoseno. In modo analogo, considerando la restrizione della funzione $\cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$ e osservando che tale funzione è decrescente, è possibile definire la sua funzione inversa

$$\arccos \, : \, [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

detta (funzione) arcocoseno (o anche *valore principale dell'arcocoseno*). Dalla monotonia di $\cos x$ in $[0, \pi]$ discende che la funzione $\arccos x$ è decrescente nel suo insieme di definizione.

Funzione arcotangente. La funzione $\tan x$ ristretta all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è crescente e quindi invertibile, con inversa crescente. La sua inversa si indica con $\arctan x$ ed è detta (funzione) arcotangente:

$$\arctan \, : \, \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Anche per l'arcotangente (come per arcoseno e arcocoseno) si sarebbe potuto decidere di invertire $\tan x$ in un altro intervallo.

Esponenziali e logaritmi (costruzione naïf). Oltre alle funzioni elementari sono importanti le funzioni esponenziali con base $a > 0$ e le loro inverse, i logaritmi in base $a > 0$:

$$y = a^x \qquad \text{e} \qquad y = \log_a x.$$

Diamo qui solo una definizione "leggera" (non rigorosa) delle funzioni esponenziali. Fissiamo $a > 0$, se $x = p/q \in \mathbb{Q}$ è possibile definire a^x

$$\text{fissato } a > 0, \quad a^x := \sqrt[q]{a^p} \qquad \forall\, x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},$$

dove la radice (come sempre) è scelta positiva. Per definire il valore a^x anche nel caso in cui x sia un numero irrazionale, è naturale approssimare $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con numeri razionali sempre più vicini.

Per le funzioni esponenziali valgono le proprietá

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad a^x > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\\
&(ii) \quad a^0 = 1,\\
&(iii) \quad a^x a^y = a^{x+y},\\
&(iv) \quad (a^x)^y = a^{xy}\\
&(v) \quad a^x \quad \text{è} \quad \begin{cases} \text{decrescente} & \text{se} \quad 0 < a < 1 \\ \text{crescente} & \text{se} \quad a > 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dato che a^x è monotòna per $a \neq 1$, essa è invertibile. La funzione inversa è $y = \log_a x$: è definita sull'insieme immagine dell'esponenziale, quindi solo per $x > 0$ ed associa ad x l'unico valore y che verifica $a^y = x$. Per i logaritmi valgono le proprietá

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \log_a x \quad \text{è definito per } x > 0,\\
&(ii) \quad \log_a 1 = 0,\\
&(iii) \quad \log_a x + \log_a y = \log_a(xy),\\
&(iv) \quad \log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x\\
&(v) \quad \log_a x \quad \text{è} \quad \begin{cases} \text{decrescente} & \text{se} \quad 0 < a < 1 \\ \text{crescente} & \text{se} \quad a > 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

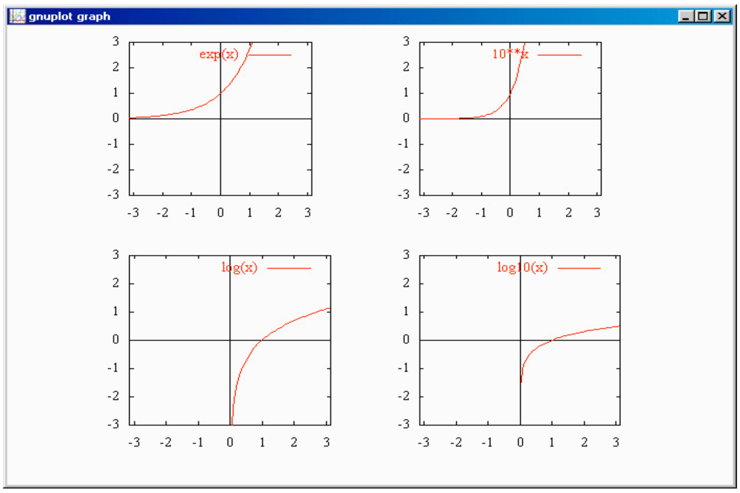

FIGURA 11. (a) $y = e^x$, (b) $y = 10^x$, (c) $y = \ln x$, (d) $y = \log_{10} x$

OSSERVAZIONE 4.1. Perché non si può definire "a elevato ad x" per a negativi? In effetti, se $a < 0$, l'espressione a^x ha senso per x del tipo p/q con p e q interi e q dispari. Quindi si potrebbe sperare di estendere questa strana funzione in modo da definire a^x anche per tutti gli altri valori di $x \in \mathbb{R}$. Ma non esiste una estensione che preservi le belle proprietà che abbiamo elencato per l'esponenziale. Ecco un esempio: supponiamo per un attimo che a^x sia ben definita per ogni a e per ogni x, allora $-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\frac{1}{2}} = [(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$. Ops!

Funzioni composte. Si possono generare funzioni anche con la *composizione di funzioni*: se $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora la formula

$$f(x) := g(\phi(x))$$

definisce una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ad esempio,

$$f(x) = \sin(1 + x^2) = g(\phi(x)) \qquad \text{dove} \quad \begin{cases} \phi(x) = 1 + x^2, \\ g(u) = \sin u. \end{cases}$$

Analogamente

$$f(x) = 2^{\cos x} = g(\phi(x)) \qquad \text{dove} \quad \begin{cases} \phi(x) = \cos x, \\ g(u) = 2^u. \end{cases}$$

Spesso la funzione composta $f(x) = g(\phi(x))$ si indica con $f = g \circ \phi$ (che si legge "g composto ϕ" o anche "g dopo ϕ")[2].

La composizione di funzioni non è un'operazione commutativa: in generale, $g \circ \phi$ e $\phi \circ g$ non sono la stessa funzione. L'ordine con cui si fanno le operazioni è importante! Se, per esempio, l'operazione ϕ sta per "sommare 1" e g per "moltiplicare per 2", allora

$$g(\phi(x)) = g(x + 1) = 2x + 2, \qquad \phi(g(x)) = \phi(2x) = 2x + 1.$$

Nel contesto delle funzioni composte, la nozione di funzione inversa diviene ancora più chiara. La funzione $Id(x) = x$, si chiama identità (è una funzione affine che ha per grafico la bisettrice del primo e terzo quadrante). Se la funzione ϕ è iniettiva su $\mathbb{R}$ e la sua funzione inversa ϕ^{-1} è anch'essa definita su tutto $\mathbb{R}$, ϕ^{-1} *è l'unica funzione che gode delle proprietà* $\phi^{-1} \circ \phi = Id$ e $\phi \circ \phi^{-1} = Id$, cioè

$$(\phi^{-1} \circ \phi)(x) = x \qquad (\phi \circ \phi^{-1})(x) = x \qquad\qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

La composizione ha senso anche per funzioni non definite in tutto $\mathbb{R}$. Sia $\phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora $f(x) := g(\phi(x))$ è ben definita per ogni $x \in I$ per cui $\phi(x) \in J$. Ad esempio, la funzione $f(x) = \ln(1 + x)$ è la composizione della funzione $\phi(x) = 1 + x$, definita in $I = \mathbb{R}$, e della funzione $g(u) = \ln u$, definita in $J = (0, +\infty)$.

[2] Alle volte si omette il simbolo $\circ$ e si scrive semplicemente $f = g\phi$, ma bisogna stare attenti a non fare confusione con la funzione prodotto.

La composizione f è definita per tutte i valori $x \in \mathbb{R}$ tali che $1 + x \in J$, cioè per $x \in (-1, +\infty)$.

Per poter comporre due funzioni ϕ e g e definire una nuova funzione $g \circ \phi$, il dominio di g deve includere almeno un parte dell'immagine di ϕ. Ad esempio, non possiamo formare la funzione $g \circ \phi$ quando $g(u) = \sqrt{u}$ e $\phi(x) = -1 - x^2$, dato che il dominio di g è $[0, +\infty)$ e l'immagine di ϕ è $(-\infty, -1)$.

Chiaramente è possibile comporre più di due funzioni. Ad esempio,

$$f(x) = \frac{1}{1 + \tan(x^2)}$$

può essere ottenuta componendo (nell'ordine) $\phi(x) = x^2$, $\psi(\phi) = 1 + \tan\phi$, $g(\psi) = \frac{1}{\psi}$. Quindi $f = g \circ \psi \circ \phi$.

Funzioni meno comuni. Esistono infiniti modi per definire funzioni. Una possibilità (vagamente esotica) è di decomporre l'insieme di definizione in un certo numero di sottoinsiemi disgiunti ed associare una opportuna regola di calcolo per ciascuno di tali sottoinsiemi.

(i) Sia $I \subset \mathbb{R}$, allora si definisce

$$\textsf{funzione caratteristica di } I: \qquad \chi_{_I}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I, \\ 0 & \text{se } x \notin I. \end{cases}$$

La funzione $\chi_{_\mathbb{R}}$ vale identicamente 1, mentre $\chi_{_\emptyset}$ vale sempre 0, la funzione $\chi_{_{[0,1]}}$ vale 1 nell'intervallo $[0, 1]$ e 0 nel complementare.

(ii) E' possibile anche fare scelte più originali: ad esempio,

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(iii) Un altro modo per generare nuove funzioni è tramite i "comandi" max e min. Ad esempio, si è già visto che

$$\max\{-x, x\} = |x|.$$

Più in generale, date f e g,

$$\max\{f, g\}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } g(x) \leq f(x), \\ g(x) & \text{se } f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

$$\min\{f, g\}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq g(x), \\ g(x) & \text{se } g(x) \leq f(x) \end{cases}$$

5. Problemi di massimo e minimo

Molti problemi pratici conducono a problemi di massimo e di minimo di funzioni: qual è il carico massimo sopportato da una trave? Qual è l'energia minima che occorre perchè un satellite sfugga dall'attrazione gravitazionale di un pianeta? Qual è il minimo sforzo che bisogna compiere per passare l'esame? Diamo perciò una definizione rigorosa di cosa si intenda per massimo e minimo di una funzione.

DEFINIZIONE 5.1. *Sia $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se esiste $x_0 \in I$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in I$, la funzione ammette* (valore) minimo in I *e x_0 è un* punto di minimo. *Si scrive*

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x) \qquad \text{(valore) minimo di } f.$$

Analogamente se esiste un punto $x_1 \in I$ tale che $f(x) \leq f(x_1)$ per ogni $x \in I$, si dice che la funzione ammette (valore) massimo in I *e x_1 è un* punto di massimo. *Si scrive*

$$f(x_1) = \max_{x \in I} f(x) \qquad \text{(valore) massimo di } f.$$

Il massimo ed il minimo dipendono dall'insieme di definizione I. In generale una restrizione di una funzione, se ammette massimo, ha un massimo minore o uguale a quello della funzione di partenza e, se ammette minimo, questo è maggiore o uguale di quello della funzione di partenza.

In effetti il massimo ed il minimo della funzione non sono altro che il massimo ed il minimo dell'insieme immagine $f(I)$:

$$\min_{x \in I} f(x) = \min f(I) = \min\{f(x) \,:\, x \in I\},$$
$$\max_{x \in I} f(x) = \max f(I) = \max\{f(x) \,:\, x \in I\}.$$

Come si fa a determinare il massimo o il minimo di una funzione di una variabile reale a partire dal grafico? Il significato geometrico di un punto di massimo è chiaro: il grafico della funzione f è al di sotto della retta di equazione $y = f(x_0) =$ costante. Quindi per determinare il massimo a partire dal grafico, basta stabilire se esista una retta con tale proprietà.

Come si vede a partire da alcuni esempi, *non tutte le funzioni ammettono massimo e/o minimo nel loro insieme di definizione!* Per superare questo ostacolo si introducono i concetti di *estremo superiore* e di *estremo inferiore*. L'estremo superiore ed inferiore di una funzione f sono l'estremo superiore ed inferiore dell'insieme immagine $f(I)$

$$\inf_{x \in I} f(x) = \inf f(I) = \inf\{f(x) \,:\, x \in I\},$$
$$\sup_{x \in I} f(x) = \sup f(I) = \sup\{f(x) \,:\, x \in I\}.$$

Il risultato sull'esistenza di estremo superiore ed inferiore garantisce che se esiste almeno un maggiorante allora esiste l'estremo superiore. Quindi, dato il grafico della funzione f ci sono solo due possibilità: o esiste almeno una retta orizzontale di equazione $y = c \in \mathbb{R}$ che sia completamente sopra il grafico di f o non ne esiste nessuna. Nel primo caso, l'estremo superiore di f è il valore minimo che si può dare al valore c facendo sempre in modo che la retta $y = c$ sia sopra il grafico di f (tale retta può anche non intersecare il grafico). Nel secondo caso, la funzione f è illimitata superiormente e $\sup_I f = +\infty$. Analogamente per l'estremo inferiore.

DEFINIZIONE 5.2. *Una funzione* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che* $\inf\limits_{x \in I} f(x) \in \mathbb{R}$ *e* $\sup\limits_{x \in I} f(x) \in \mathbb{R}$ *(quindi non sono* $\pm\infty$*) si dice* limitata.

Il significato geometrico della limitatezza di una funzione è immediato: una funzione è limitata se e solo se il suo grafico è interamente contenuto in una striscia orizzontale $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d\}$ per qualche $c, d \in \mathbb{R}$.

La lattina più conveniente. Supponiamo che si voglia progettare una scatola di latta di forma cilindrica (altezza h e raggio di base r). Il problema è: fissato il volume della scatola, esiste una scelta di r e h che minimizzi il quantitativo di latta da utilizzare (cioè la superficie totale del cilindro)? Sia V il volume della scatola e S la sua superficie

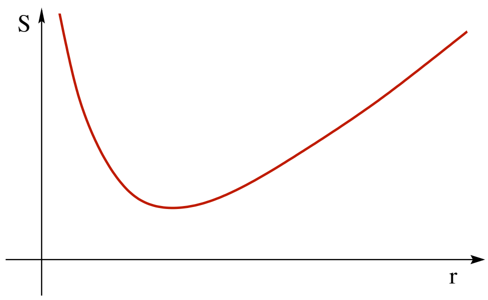

FIGURA 12. Il grafico di $S(r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{\pi r}\right)$.

totale. Allora $S = 2\pi r^2 + 2\pi hr = 2\pi\left(r^2 + hr\right)$ e $V = \pi r^2 h$. Fissare il volume V e minimizzare S, vuol dire scegliere $V =$ costante. Quindi $h = V/\pi r^2$, e, sostituendo in S,

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad \Rightarrow \qquad S = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{\pi r}\right).$$

Dal grafico della funzione S (che si può ottenere sommando i grafici $s = r^2$ e $s = V/\pi r$) si vede che tale minimo esiste. Il calcolo esplicito di quanto valga non è possibile per via elementare (ma con un minimo di cognizione di derivate, si può fare!).

CAPITOLO 3

Incontri ravvicinati con i limiti: le successioni

Una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni numero naturale n un valore $a(n)$ è una successione (numerica). In genere, l'$n-$esimo elemento della successione si indica con a_n (invece di $a(n)$), questione di tradizione. Gli elementi della successione a_n possono essere pensati come una sequenza di valori ordinati in base al loro indice n

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots$$

Un primo esempio è la successione dei numeri pari: $2, 4, 6, \dots$. In questo caso $a_n = 2n$. Un altro esempio semplice di funzione di n è l'espressione n-fattoriale, definita dal prodotto dei primi n numeri interi

$$a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

che dà luogo alla successione $1, 1, 2, 6, 24, 120, \dots$ (per definizione $0! := 1$).

Una successione può essere rappresentata disegnando nel piano cartesiano sopra ogni valore $n \in \mathbb{N}$ (dell'asse x) il valore definito da a_n, proprio come nel caso delle funzioni. Questo primo metodo è molto pratico nel caso di successioni definite da $a_n = f(n)$, dove si conosca il grafico della funzione f: basta prendere sul grafico di f solamente i punti con coordinata $x \in \mathbb{N}$. In alternativa, assegnata la successione a_n si può considerare come sua rappresentazione il grafico della funzione g definita da

$$g(x) = a_n \qquad \text{per} \quad x \in [n, n+1).$$

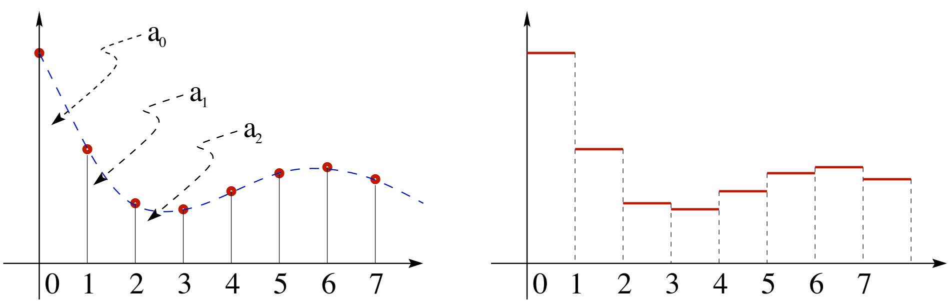

FIGURA 1.

Successioni definite per ricorrenza. In quel che segue utilizzeremo le successioni numeriche come una "cavia da laboratorio" per imparare, in una situazione particolarmente semplice, il concetto di limite e le procedure di base di calcolo. In realtà le successioni numeriche possono emergere anche da semplici modelli applicati. Supponiamo di voler studiare una popolazione di individui e di indicare con a_n il numero di abitanti all'anno n. Per controllare l'evoluzione della popolazione occorre conoscere il *tasso di incremento* R, definito da

$$R = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n},$$

che descrive quanto valga l'aumento di popolazione $a_{n+1} - a_n$ rispetto alla popolazione a_n all'anno n. Se si suppone che il tasso di crescita R sia costante ed uguale ad $r \in \mathbb{R}$, si ottiene, $a_{n+1} - a_n = ra_n$, cioè, esplicitando rispetto ad a_{n+1},

$$a_{n+1} = (1 + r)a_n.$$

Quindi, se si assegna la popolazione a_0 all'anno iniziale, si deduce che $a_1 = (1 + r)a_0$, $a_2 = (1 + r)a_1 = (1 + r)^2 a_0$ In generale questo semplice modello dà luogo ad una popolazione che cresce esponenzialmente in n, infatti

$$a_{n+1} = (1 + r)a_n = (1 + r)^2 a_{n-1} = \cdots = (1 + r)^{n+1} a_0.$$

Ad esempio, se si parte da una popolazione di 100 abitanti e si suppone che il tasso di crescita annuale sia del 10%, cioè $r = 0,1$, dopo dieci anni la popolazione sarà di $a_{10} = 1,1^{10} \times 100$ abitanti (circa 259). Se si sceglie il tasso di incremento della forma $R = r(N - a_n)$ (questo vuol dire che c'è una popolazione critica, in questo caso pari a N, tale che se $a_n > N$ la popolazione decresce, mentre se $a_n < N$ la popolazione aumenta), si ottiene

$$a_{n+1} = (1 + Nr)a_n - ra_n^2 \qquad \text{(equazione logistica)}.$$

Già un oggetto così semplice e apparentemente innocuo è in grado di generare (per scelte opportune del parametro r) dinamiche particolarmente "stravaganti" e molto interessanti.

L'esempio precedente rientra nella classe delle successioni *definite per ricorrenza*: il termine $(n + 1)-$esimo si ottiene in funzione dei termini precedenti. Nella forma più semplice, il termine $(n+1)-$esimo è determinato dal solo termine $n-$esimo: assegnata la funzione f (dipende dal modello), si pone $a_{n+1} = f(a_n)$. Come nell'esempio precedente occorre anche assegnare una *condizione iniziale*, cioè deve essere dato il valore iniziale a_0.

1. Limite di successioni

Il concetto fondamentale su cui si basa l'analisi matematica è quello di limite. L'idea che esprime il concetto di limite di una successione è semplice: assegnata la successione a_n, siamo in grado di "prevedere" quello che succederà per valori di n molto grandi? Più precisamente: è vero che la successione a_n "si stabilizza" per $n \to +\infty$, ovvero tende ad avvicinarsi ad un valore ℓ fissato? In caso affermativo, si dice che la successione ammette limite ℓ per $n \to +\infty$, altrimenti si dice che la successione non ha limite. Molte parole che abbiamo scritto nelle righe precedenti vanno precisate: che vuol dire "avvicinarsi"? E mandare n a $+\infty$ è da considerarsi un terribile insulto?

Partiamo da alcuni esempi. Sia

$$a_n = \frac{1}{n+1} \qquad n \in \mathbb{N},$$

cioè consideriamo la successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. Nessun numero di questa successione è zero, ma, per n che cresce, a_n si avvicina a zero. La frase "si avvicina a zero" va interpretata in questo senso: se decidiamo che l'essere vicino vuol dire che la distanza tra a_n e 0 deve essere minore di $1/10$, allora basta considerare gli elementi a_n della successione con indice $n \geq 10$; se rendiamo la condizione più stringente, ad esempio richiedendo che la distanza sia minore di $1/100$, basta considerare $n \geq 100$, e così via. In generale, comunque fissiamo una distanza $\varepsilon > 0$, da un certo indice n_ε in poi (n_ε dipende da ε) la distanza di a_n da 0 (che è data da $|a_n - 0|$) è minore di ε, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon. \tag{11}$$

In questo caso si dice che a_n tende a 0 per $n \to +\infty$ (che si legge "n tende a $+\infty$"). Per la successione $b_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ la situazione è esattamente la stessa, dato che

$$|b_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1} - 0\right| = \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| = |a_n - 0|.$$

L'unica differenza è che i numeri b_n sono alternativamente più grandi e più piccoli di zero, cioè la successione *oscilla* attorno al valore limite 0, ma anche in questo caso vale la proprietà (11).

Consideriamo $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. Scrivendo la successione nella forma

$$a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| = \frac{1}{n+1},$$

vediamo che, per $n \to +\infty$, la distanza di a_n da 1 tende a zero, cioè il valore a_n si avvicina ad 1. Anche la successione $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+n+1}$ si comporta in modo analogo, infatti:

$$a_n = 1 - \frac{n+2}{n^2+n+1} \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| = \frac{n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \qquad \forall n \geq 2,$$

da cui si deduce che la distanza di a_n da 1 tende a zero per $n \to \infty$.

DEFINIZIONE 1.1. <u>*Limite di successione.*</u> *Si dice che la successione a_n* converge ad *$\ell \in \mathbb{R}$* per *$n \to +\infty$ e si scrive $a_n \to \ell$ per $n \to +\infty$ o $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$, se*

$$(12) \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall\, n > n_\varepsilon.$$

Il valore ℓ è il limite della successione *a_n.*

Se $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$ (cioè se vale (11)), si dice che a_n è infinitesima.

La definizione esprime che, comunque si fissi una soglia di errore $\varepsilon > 0$, tutti gli elementi a_n della successione distano dal limite ℓ meno di ε, tranne al più un numero <u>finito</u> (quelli con indice da 1 ad n_ε). Quindi una maniera equivalente di dire che ℓ è il limite di a_n è affermare che *ogni intorno di ℓ contiene tutti i valori della successione a_n tranne al più un numero finito.*

Si faccia bene attenzione al fatto che la soglia ε vive sull'asse delle ordinate (e non su quello delle ascisse). In generale, scegliendo valori più piccoli per il margine di errore ε occorre scegliere valori più grandi di n_ε; in altre parole, in generale, n_ε cresce quando ε tende a zero.

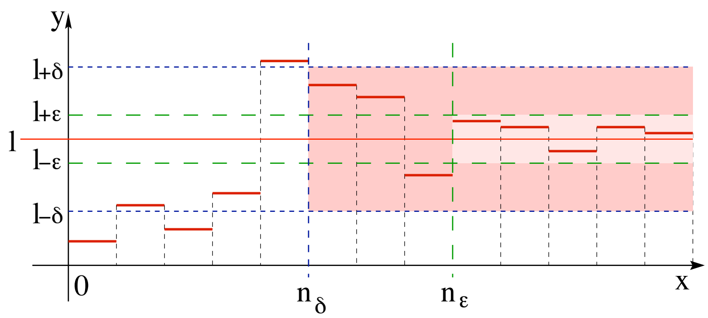

FIGURA 2.

OSSERVAZIONE 1.2. Per quale motivo si richiede che ε possa essere scelto arbitrariamente? Non basterebbe scegliere un fissato ε sufficientemente piccolo, ad esempio ε pari a un miliardesimo o a un miliardesimo di miliardesimo? Il problema è che i concetti di "grande" e "piccolo" sono soggettivi, mentre quello che si vuole definire qui è un criterio assoluto che vada bene sia per l'astronomo che usa la distanza Terra-Luna come parametro di "vicinanza", sia per il fisico atomico per cui un millimetro è già una distanza abissale. La richiesta di una proprietà che valga *per ogni scelta di ε* rende la definizione "universale", cioè indipendente dalla personale idea di piccolo o grande.

Esercizio 1.3. *Sia a_n una successione convergente ad ℓ per $n \to +\infty$ e sia b_n un'altra successione tale che $b_n = a_n$ per ogni $n > N_A$ dove N_A è il numero di Avogadro*[1]. *Dimostrare che anche b_n converge ad ℓ per $n \to +\infty$.*

Soluzione. Niente di più facile dato che la definizione di limite non dipende dal comportamento di un numero finito di elementi della successione. Per ipotesi,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \qquad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall\, n > n_\varepsilon.$$

Ora vogliamo far vedere che vale una frase analoga anche per la successione b_n. Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $n'_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon, N_A\}$. Allora, se $n > n'_\varepsilon$, dato che $n > N_A$ si ha $b_n = a_n$ e dato che $n > n_\varepsilon$ vale anche $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Dunque

$$|b_n - \ell| = |a_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall\, n > n'_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon, N_A\},$$

cioè la conclusione. E' essenziale che N_A sia proprio il numero di Avogadro o lo stesso ragionamento vale per N_A qualsiasi?

Calcolo diretto di un limite. Abbiamo una perfetta definizione di limite: logicamente ineccepibile. Ma come fare per verificarne la validità in un caso concreto? Proviamo a vedere un esempio. Tenete però conto che, nella pratica, non è questo il modo con cui si calcolano la maggior parte dei limiti! L'esempio che segue serve solo per acquisire maggiore familiarità con la definizione.

Consideriamo la successione

$$a_n = \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Ammette limite? Ecco subito il primo problema: nella definizione di limite compare il valore ℓ del limite stesso, ma in generale ci si trova ad avere un'espressione per la successione, non per il suo (eventuale) limite. Questo va ottenuto per un'altra strada. Proviamo a ragionare in maniera casereccia. La domanda di fondo è: cosa succede dei valori a_n per n molto grande? Ad esempio, se $n = 1000$,

$$a_{1000} = \frac{1000^2}{1000^2+1} = \frac{1000000}{1000001}.$$

Bene... e se $n = 100000$? Allora

$$a_{100000} = \frac{100000^2}{100000^2+1} = \frac{10000000000}{10000000001}.$$

Come si vede, per valori di n molto grandi il termine $+1$ a denominatore diventa sempre più ridicolo perché va a sommarsi ad una quantità enormemente più grande. Allora è sensato aspettarsi che per $n \to +\infty$ valga un'approssimazione del tipo $n^2 + 1 \approx n^2$ e quindi $a_n = \frac{n^2}{n^2+1} \approx \frac{n^2}{n^2} = 1$. Questo per ora non dimostra un bel nulla, ma fa sospettare che la successione abbia limite e che il suo limite sia $\ell = 1$. Rimbocchiamoci le maniche

[1] Per chi non lo ricorda il numero di Avogadro è $N_A = 6,02214199 \times 10^{23}$.

e proviamo a dimostrarlo. Qual'è l'affermazione racchiusa nella definizione di limite? la distanza di a_n da ℓ è piccola se n è grande. Prima di tutto, quindi, scriviamo $|a_n - \ell|$:

$$|a_n - \ell| = \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n^2 - n^2 - 1}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1}.$$

Ora si tratta di far vedere che, fissato $\varepsilon > 0$, questa distanza è minore di ε se scegliamo $n > n_\varepsilon$ dove *abbiamo completa libertà di scelta per* n_ε. Imponiamo la disequazione a cui vogliamo arrivare e riscriviamola come condizione su n:

$$\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \qquad \overset{\varepsilon<1}{\Longleftrightarrow} \qquad n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}.$$

Il gioco è fatto, basta scegliere $n_\varepsilon \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, ad esempio,

$$n_\varepsilon := \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}\right] + 1$$

dove $[\,\cdot\,]$ indica la funzione parte intera.

Esercizio 1.4. *Dimostrare a partire dalla definizione la validità di*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \qquad k \in \mathbb{N},\ k \neq 0.$$

Esercizio 1.5. *Dimostrare che, se* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, *allora* $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |a|$.

Come dimostrare che una successione non ha limite? Data una successione a_n, una sottosuccessione a_{n_k} di a_n si ottiene scegliendo un sottoinsieme infinito degli elementi di a_n, scelti in modo che ogni elemento abbia indice strettamente maggiore di quello del precedente. Ad esempio, gli elementi di indice dispari a_1, a_3, a_5, a_7, $\ldots$ costituiscono una sottosuccessione di a_1, a_2, a_3, a_4, $\ldots$, così come gli elementi di indice pari a_0, a_2, a_4, a_6, $\ldots$. Invece $a_5, a_3, a_{12}, a_{101}, \ldots$ non è una sottosuccessione, perché il primo elemento ha indice maggiore del secondo.

Come individuare una sottosuccessione? Bisogna indicare il primo elemento, poi il secondo, quindi il terzo e così via. In definitiva bisogna scegliere un'applicazione da $\mathbb{N}$ ad $\mathbb{N}$ che ci dica al $k-$esimo posto qualè l'elemento n_k della successione scelto: al numero $k \in \mathbb{N}$ viene quindi associato un numero naturale n_k. Per fare in modo che l'ordine degli elementi venga preservato occorre che n_k sia crescente, cioè se $k_1 < k_2$ allora $n_{k_1} < n_{k_2}$. La sottosuccessione dei termini di indice dispari è espressa da $n_k = 2k + 1$: per $k = 0$ si prende $n_k = 1$, per $k = 1$ si prende $n_k = 3$ e così via...

Esercizio 1.6. *Dire quale delle seguenti espressioni possono essere i primi elementi di una sottosuccessione di* $a_n = n$

$$\{1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}, \qquad \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}, \qquad \{1, 3, 5, 7, 6, 9, \ldots\}.$$

Esercizio 1.7. *Data la successione $a_n = n$, quali sono i primi termini della sottosuccessione a_{k^2}? E se $k_n = 2n$? Ripetere l'esercizio nel caso in cui $a_n = n^2 + 1$.*

Proposizione 1.8. *Sia a_n una successione convergente ad ℓ per $n \to +\infty$. Allora ogni sua sottosuccessione a_{n_k} converge allo stesso limite ℓ per $k \to +\infty$.*

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

La Proposizione 1.8 può essere utilizzata "in negativo" per dimostrare che una assegnata successione non ammette limite. Consideriamo ad esempio la successione $a_n = (-1)^n$. La sottosuccessione dei termini di indice pari è $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ per ogni k, quindi, essendo costantemente uguale ad 1, converge ad 1 per $k \to +\infty$. Invece, la sottosuccessione dei termini di indice dispari è $a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$ per ogni k, quindi converge a -1 per $k \to +\infty$. Dato che due sottosuccessioni diverse convergono a limiti diversi, la conclusione della Proposizione 1.8 e quindi l'ipotesi non può essere vera: la successione $(-1)^n$ non è convergente. In generale, *se da una successione possono essere estratte due sottosuccessioni convergenti a limiti diversi, la successione non è convergente.*

Prime proprietà delle successioni convergenti. Prima di enunciare alcuni risultati che permettono di calcolare limiti in maniera più semplice di come si è fatto finora, dimostriamo alcune proprietà generali delle successioni convergenti.

Proposizione 1.9. *Se una successione è convergente, allora il suo limite è unico.*

Dimostrazione. Mostriamo che se la successione a_n tende sia ad ℓ che ad ℓ', allora deve essere $\ell = \ell'$. Per definizione di limite, è vero che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall\, n > n_\varepsilon \qquad \text{e} \qquad \exists\, n'_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |a_n - \ell'| < \varepsilon \quad \forall\, n > n'_\varepsilon.$$

Allora, per $n > \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$, sono vere entrambe le affermazioni e quindi

$$0 \le |\ell - \ell'| = |\ell - a_n + a_n - \ell'| \le |\ell - a_n| + |a_n - \ell'| < 2\varepsilon.$$

In definitiva, abbiamo dimostrato che, per ogni $\varepsilon > 0$, vale $0 < |\ell - \ell'| < 2\varepsilon$. Quindi $|\ell - \ell'| = 0$, cioè $\ell = \ell'$. □

Definizione 1.10. *Una successione a_n tale che esista $M > 0$ per cui $|a_n| \le M$ per ogni n, (cioè tutti gli a_n appartengono all'intervallo $[-M, M]$) si dice* limitata.

Se si ricorda che una successione a_n è una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, la condizione espressa nella Definizione 1.10 è equivalente alla frase "$a(\mathbb{N})$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$", che è proprio la definizione di limitatezza data per funzioni di una variabile.

Proposizione 1.11. *Se a_n è una successione convergente allora è anche limitata.*

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon = 1$, dato che a_n è convergente, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\ell - 1 < a_n < \ell + 1$ per ogni $n > N$. Quindi la "coda" della successione $a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ vive in un insieme limitato. Dato che i termini mancanti sono in numero finito, tutta la successione "vive" in un insieme limitato (se necessario più grande del precedente). $\square$

Il viceversa non è vero: *esistono successioni limitate, non convergenti.* Ad esempio, la successione $a_n = (-1)^n$ non è convergente, ma è limitata dato che $|(-1)^n| = 1$ per ogni n (quindi si può scegliere $M = 1$ nella Definizione 1.10).

Successioni divergenti. Oltre alle successioni che tendono ad un limite, ci sono anche quelle il cui valore a_n diventa arbitrariamente grande: ad esempio la successione dei numeri pari $2n$, o la successione del fattoriale $n!$. La prossima definizione esprime cosa significhi in modo preciso l'affermazione "una successione tende a $+\infty$".

Definizione 1.12. *La successione a_n* diverge a $+\infty$ *(rispettivamente a $-\infty$) per $n \to +\infty$ se, comunque si scelga un valore M tutti i valori a_n sono più grandi di M (risp. più piccoli) tranne al più un numero finito. In tal caso si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad (\textit{risp.} \ -\infty).$$

In modo equivalente si può scrivere

$$\forall\, M \quad \exists\, n_M \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad a_n \geq M \quad (\textit{risp. } a_n \leq M) \quad \forall\, n > n_M. \tag{13}$$

Come nel caso delle successioni divergenti è utile vedere almeno un esempio di verifica diretta del fatto che una successione è divergente. Ad esempio, dimostriamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty.$$

Fissato $M > 0$, dobbiamo far vedere che è possibile determinare n_M per cui valga $a_n > M$ per ogni $n > n_M$. Dato che

$$\frac{n^2}{n+1} > M \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^2 - Mn - M > 0,$$

la domanda da porsi è: per quali n è vera la disequazione finale? Le radici del polinomio di secondo grado $x^2 - Mx - M$ sono $x_\pm := (M \pm \sqrt{M^2 + 4M})/2$, quindi, se $n > x_+$, è vero che $n^2 - Mn - M > 0$. Ottimo, allora scegliamo

$$N_M := \left[\frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2}\right] + 1.$$

Strade diverse portano alla stessa conclusione. Lo stesso problema può essere risolto in un modo diverso, meno contoso. Prima di tutto si osserva che (verificate i passaggi)

$$a_n = \frac{n^2}{n+1} = n - \frac{1}{n+1} \geq n - 1.$$

Quindi, se $n-1 > M$, vale anche $a_n > M$. Perciò si può scegliere $N_M = [M+1]+1$ per dedurre la stessa conclusione. In effetti, il valore n_M della Definizione 1.12 (così come n_ε della Definizione 1.1), non è definito in maniera univoca, tutt'altro!

ESERCIZIO 1.13. *Dimostrare le implicazioni*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|a_n|} = +\infty.$$

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Criterio di convergenza di Cauchy. Ogni successione convergente definisce un numero ℓ, il suo limite, ma l'unico test di convergenza che emerge dalla definizione consiste nel dimostrare che la differenza $|a_n - \ell|$ è infinitesima, quindi è applicabile solo se il numero ℓ è già noto. Invece, è essenziale avere un test "intrinseco" di convergenza che non richieda la conoscenza *a priori* del valore del limite, ma che coinvolga solamente i termini stessi della successione.

TEOREMA 1.14. Criterio di convergenza di Cauchy. *Una successione a_n è convergente se e solo se è una* successione di Cauchy, *cioè se vale la condizione*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n > n_\varepsilon.$$

La condizione di Cauchy descrive il fatto che gli elementi della successione distano tra loro meno di una soglia arbitraria $\varepsilon > 0$ a patto di considerare termini con un indice sufficientemente grande. Il fatto che i termini si avvicinino l'un l'altro per $n \to +\infty$ quando una successione è convergente è del tutto naturale: i termini si avvicinano al limite ℓ e quindi si avvicinano tra loro. La proprietà notevole è che vale anche il viceversa: se gli elementi della successione si avvicinano, allora la successione converge. Non è questa la sede per approfondire ulteriormente questo criterio, ma non si può mancare di dire che si tratta di una pietra miliare nella costruzione dei numeri reali a partire dai numeri razionali.

Piccolo glossario per le successioni

Se una successione $a_n \dots$

... è convergente o divergente (a $\pm\infty$), allora è regolare;

... non è convergente né divergente, allora è non regolare;

... tende a 0 per $n \to +\infty$, allora è infinitesima;

... è tale che $|a_n| \leq M$ per qualche M e per ogni n, (cioè se i suoi elementi sono in un intervallo limitato) allora è limitata;

... è tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$, allora diverge in modulo.

$$\begin{array}{ccccc}
a_n \text{ è infinitesima} & \Rightarrow & a_n \text{ converge} & \Rightarrow & a_n \text{ è limitata} \\
 & & \Downarrow & & \\
 & & a_n \text{ è regolare} & & \\
 & & \Uparrow & & \\
 & & a_n \text{ diverge} & \Rightarrow & a_n \text{ diverge in modulo}
\end{array}$$

2. Il limite entra in società

Fin qui abbiamo definito il senso della parola *limite* per successioni di numeri reali. Una successione in $\mathbb{R}$ può avere una struttura complicata: ad esempio, può essere somma/prodotto di vari termini. Come si comporta l'operazione di "passaggio al limite" rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$ definite in $\mathbb{R}$? E rispetto ai segni $\leq$ e $<$?

Operazioni razionali con i limiti. Per il calcolo dei limiti è possibile usare le operazioni elementari di somma, moltiplicazione, sottrazione e divisione.

(i) *Somma e sottrazione.* Il limite della somma/sottrazione di successioni convergenti è la somma/sottrazione dei limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \ \lim_{n\to+\infty} b_n = b \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \pm b_n = a \pm b.$$

(ii) *Prodotto.* Il limite del prodotto di successioni convergenti è il prodotto dei limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \ \lim_{n\to+\infty} b_n = b \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n b_n = ab.$$

(iii) *Rapporto.* Il limite del rapporto di successioni convergenti è il rapporto dei limiti *a patto che la successione a denominatore non tenda a zero*:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \ \lim_{n\to+\infty} b_n = b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

In altre parole: possiamo *invertire l'ordine di applicazione* delle operazioni razionali e del procedimento di limite ottenendo lo stesso risultato, o anche *operazioni razionali e limiti commutano.*

Dimostriamo la proprietà del prodotto. Supponiamo $a_n \to a$ e $b_n \to b$ per $n \to +\infty$. Allora[2]

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \quad : \quad |a - a_n| < \varepsilon, \ |b - b_n| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

[2]Il valore di n_ε per la successione $\{a_n\}$ e quello per la successione $\{b_n\}$ potrebbero essere diversi, ma, in questo caso, potremmo scegliere il più grande dei due, per cui sono soddisfatte le relazioni sia per a_n che per b_n.

Scrivendo $ab - a_n b_n = b(a - a_n) + a_n(b - b_n)$, e ricordando che una successione convergente è sempre limitata (per cui esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$ per ogni n), si ha che

$$|ab - a_n b_n| \leq |b||a - a_n| + |a_n||b - b_n| < (|b| + M)\varepsilon \qquad \forall n > n_\varepsilon.$$

Dato che la quantità $(|b| + M)\varepsilon$ può essere resa arbitrariamente piccola scegliendo ε sufficientemente piccolo, la distanza tra ab e $a_n b_n$ diviene arbitrariamente piccola scegliendo valori di n sufficientemente grandi e quindi vale la conclusione.

Tramite queste regole è possibile calcolare molti limiti. Ad esempio:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + n + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2}{3},$$

passando al limite sia nel numeratore che nel denominatore.

Per ora, non è chiaro cosa dire sul comportamento al limite della successione $\dfrac{a_n}{b_n}$ nel caso in cui la successione b_n sia infinitesima. Torneremo tra breve sulla questione.

Esercizio 2.1. *Calcolare il limite per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni*

$$\frac{n^4 + 1}{n^4 + n^2}, \qquad \frac{3n^2 + 1}{n(2n^2 + 1)}, \qquad \frac{(n + 1)(2n + 2)(3n + 3)}{n^3}, \qquad \frac{(n + 1)^2}{(n^2 + 1)^2}.$$

Limiti e disequazioni. Un altra questione importante è come si comporti l'operazione di limite rispetto all'ordinamento dei numeri reali.

Teorema 2.2. Monotonìa del limite. *Sia $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. Se, per qualche $N \in \mathbb{N}$, vale $a_n < b_n$ (oppure $a_n \leq b_n$) per ogni $n \geq N$, allora $a \leq b$.*

Dimostrazione. Dato che a_n tende a a e b_n tende a b, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$, $a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon$ per ogni $n > N$ per un opportuno N. Guardando il primo e l'ultimo termine nella catena di diseguaglianze, si deduce che $b - a > -2\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Quindi, necessariamente, $b - a \geq 0$. □

Il Teorema 2.2 afferma che l'operazione di limite è "monotòna non decrescente", nel senso che vale l'implicazione

$$a_n < b_n \qquad \Rightarrow \qquad a := \lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} b_n =: b.$$

Si noti che, nel passaggio al limite, la disuguaglianza stretta diviene una disuguaglianza non stretta. Ad esempio, scegliendo $a_n = 1/2n$ e $b_n = 1/n$, si ha $a_n < b_n$ per ogni n, ma $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

In maniera analoga, si dimostra il seguente (utilissimo) risultato.

TEOREMA 2.3. *Teorema dei carabinieri.* *Siano a_n, b_n, c_n successioni tali che*

(i) esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n > N$,

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \ell \in \mathbb{R}$.

Allora la successione b_n è convergente e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$.

DIMOSTRAZIONE. L'obiettivo è dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ c'è una scelta di $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$. Quindi occorre stimare dall'alto e dal basso i termini b_n. Dalle ipotesi segue che comunque si fissi $\varepsilon > 0$ esiste $\tilde{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > \tilde{n}_\varepsilon$,

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon.$$

Quindi, dato che per ipotesi esiste N tale che $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n > N$, si ottiene

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon \qquad \forall n > N := \max\{N, \tilde{n}_\varepsilon\},$$

ossia la conclusione. □

ESEMPIO 2.4. Dato $x \in (0,1)$, applichiamo il Teorema 2.3, alla successione

$$b_n = x^n.$$

Chiaramente esiste $h > 0$ tale che $x = 1/(1+h)$. Poiché $(1+h)^n \geq 1 + nh$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (dimostrarlo!),

$$0 < b_n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dato che $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+nh} = 0$, scegliendo $a_n = 0$ e $c_n = \frac{1}{1+nh}$ e applicando il Teorema 2.3

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0 \qquad \text{per} \quad x \in (0,1).$$

ESERCIZIO 2.5. *Dati $\lambda \in [0,1)$ e $a_0 \in \mathbb{R}$, sia a_n la successione definita per ricorrenza da $a_{n+1} = \lambda a_n$. Dimostrare che la successione a_n è infinitesima.*

Conseguenza del Teorema 2.3 è questo piccolo criterio, che è una versione più generale dell'esercizio precedente: sostanzialmente si suppone che l'uguaglianza $a_{n+1} = \lambda a_n$ con $\lambda \in [0,1)$ valga "all'infinito"...

COROLLARIO 2.6. *Sia $a_n > 0$ per ogni n una successione tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \tag{14}$$

Allora, se $\lambda \in [0,1)$, la successione a_n è infinitesima.

DIMOSTRAZIONE. *Passo 1.* Dimostriamo che esistono $\sigma \in [0,1)$ e $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_{n+1} \leq \sigma a_n \qquad \forall\, n \geq N. \tag{15}$$

Infatti, scegliamo $\sigma \in (\lambda, 1)$ e sia $\varepsilon := \sigma - \lambda$. Utilizzando la definizione di limite per la successione a_{n+1}/a_n, si deduce che esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda + \varepsilon = \lambda + (\sigma - \lambda) = \sigma \qquad \forall\, n > n_\varepsilon.$$

che porta alla (15) scegliendo $N = n_\varepsilon$.

Passo 2. Dimostriamo che a_n è infinitesima. Per semplicità, supponiamo $N = 0$ (cioè che (15) valga per ogni n), allora

$$0 < a_{n+1} \leq \sigma a_n \leq \sigma^2 a_{n-1} \leq \ \dots \ \leq \sigma^{n+1} a_0.$$

Dato che $\sigma \in [0,1)$, per $n \to +\infty$ la quantità $\sigma^n a_1$ tende a zero e quindi si ha la conclusione. Nel caso generale, dato che

$$0 < a_{n+1} \leq \sigma^n \sigma^{1-N} a_N \qquad \forall n \geq N,$$

la dimostrazione è analoga. □

È possibile dare criteri analoghi al Teorema 2.3 per dimostrare la divergenza di una successione. Ad esempio, una successione a_n che sia più grande di una successione b_n divergente a $+\infty$ è divergente a $+\infty$.

ESEMPIO 2.7. Consideriamo di nuovo la successione $b_n = x^n$, questa volta con $x > 1$. Allora $x = 1 + h$ con $h > 0$. Dalla disuguaglianza $(1+h)^n \geq 1 + nh$, segue

$$b_n = (1+h)^n \geq 1 + nh$$

Dato che $1 + nh \to +\infty$ per $n \to \infty$, anche la successione b_n diverge a $+\infty$.

Zeri a denominatore ed uso degli infiniti. Dall'analisi che abbiamo presentato fin qui restano fuori alcuni casi significativi:

– che succede della successione $\dfrac{a_n}{b_n}$ nel caso in cui $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$?

– che succede di somma/sottrazione/prodotto/rapporto quando qualcuno dei termini in gioco tende a $+\infty$ o a $-\infty$?

Partiamo dalla prima delle due questioni. Un numero molto piccolo a denominatore rende tutta la frazione molto grande. Quindi è ragionevole aspettarsi che, qualora il denominatore sia infinitesimo, il rapporto tenda a $+\infty$. Il banalissimo esempio:

$$a_n = 1, \qquad b_n = \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{1/n} = n \to +\infty \qquad \text{per} \quad n \to +\infty,$$

dà conforto a questa prima ipotesi di lavoro. Arrischiamoci in una congettura:

$$\textit{Congettura 1:} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

Ma se consideriamo il caso

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_n}{b_n} = \frac{1/n}{1/n} = 1 \to 1 \qquad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

Cosa succede? Molto semplice, il denominatore è infinitesimo, ma lo è anche il numeratore. Quindi, può capitare che il tendere a zero del denominatore sia (in qualche modo) compensato dal tendere a zero del numeratore! Proviamo una nuova versione:

$$\textit{Congettura 2:} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

Qui non siamo troppo lontani dal vero, ma ancora siamo stati un po' troppo leggeri nella questione dei segni: nel caso

$$a_n = 1, \qquad b_n = -\frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{-1/n} = -n \to -\infty \qquad \text{per} \quad n \to +\infty,$$

Proponiamo allora una versione (si spera finale) più precisa:

$$\textit{Congettura 3:} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = +\infty$$

La Congettura 3 è vera. Per dimostrarla, bisogna mostrare che per ogni $M > 0$, vale la disuguaglianza $|a_n/b_n| \geq M$ per n sufficientemente grande. Dato che la disequazione precedente è equivalente a $|a_n| - M|b_n| \geq 0$ bisogna mostrare che

$$\forall\, M \quad \exists\, n_M \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |a_n| - M|b_n| \geq 0 \quad \forall\, n > n_M.$$

Niente di più facile, dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \big(|a_n| - M|b_n|\big) = |a| > 0.$$

Esercizio 2.8. *Siamo tranquilli e soddisfatti del nostro risultato, quando, d'improvviso, giunge un tipo, sicuro del fatto suo, che afferma*

$$\textit{Congettura 4:} \qquad \left.\begin{array}{l} \exists\, \nu > 0 \quad \textit{t.c.} \quad a_n \geq \nu \quad \forall\, n, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0 \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = +\infty$$

Credergli o non credergli?

Resta fuori dalla nostra analisi il caso in cui sia il numeratore che il denominatore tendano a 0 per $n \to +\infty$. In questo caso può succedere di tutto! Ci sono casi in cui il rapporto tende a zero, casi in cui tende ad ∞, casi in cui il limite del rapporto non esiste! Non esiste una regola generale e per questo si dice che si tratta di una forma indeterminata (nel senso che non si può determinare subito se esista e quanto valga il limite ed occorre un'analisi più raffinata):

$$\textbf{forma indeterminata} \quad \frac{0}{0} \ : \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = ?$$

Esercizio 2.9. *Trovare due successioni a_n e b_n infinitesime tali che la successione dei rapporti a_n/b_n non abbia limite.*

Consideriamo il caso in cui uno dei termini sia divergente (per fissare le idee, divergente a $+\infty$) e l'altro convergente, cioè supponiamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = b.$$

Cosa succede di somma e prodotto? La regola, detta in maniera molto poco ortodossa, è che "finché i termini in gioco non si contrastano tra loro tutto va bene...". Ad esempio:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = +\infty, \qquad\qquad \text{se} \quad b \neq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} |a_n b_n| = +\infty,$$

(dimostrate queste proprietà!). L'unica situazione di "contrasto" è quella in cui la successione da studiare sia prodotto di una successione divergente e di una infinitesima

$$\textbf{forma indeterminata} \quad \infty \cdot 0 \ : \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = ?$$

Infine, resta la situazione più drammatica di tutte: entrambe le successioni a_n e b_n sono divergenti. Nel caso in cui si sommino due successioni divergenti a $+\infty$, la conclusione è evidente: la successione somma è anch'essa divergente a $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = +\infty.$$

Nel caso in cui le due successioni divergano una a $+\infty$ e l'altra a $-\infty$, non si può dedurre nessuna conclusione generale:

$$\textbf{forma indeterminata} \quad +\infty - \infty \ : \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = ?$$

Il prodotto di successioni divergenti non crea nessun problema particolare (bisogna solo stare attenti al segno di ∞, che si deduce con la buona vecchia regola del segno di un prodotto). Ad esempio,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = +\infty.$$

Per quanto riguarda il rapporto, pochi minuti di riflessione portano alla conclusione che l'unica situazione problematica è la seguente:

$$\textbf{forma indeterminata}\quad \frac{\infty}{\infty}\ : \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty,\\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \infty\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = ?$$

3. Calcolo di alcuni limiti

Utilizziamo ora le proprietà dei limiti per studiare alcune successioni specifiche.

Esempio 3.1.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x} = 1 \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

Poniamo $a_n = \sqrt[n]{x}$ e usiamo la disequazione $(1+h)^n \geq 1 + nh$. Nel caso $x > 1$, allora anche $\sqrt[n]{x} > 1$ e quindi $h_n := \sqrt[n]{x} - 1 > 0$ e $a_n = 1 + h_n$. Esplicitando la disequazione rispetto a h_n,

$$x = (a_n)^n = (1+h_n)^n \geq 1 + nh_n \quad\Rightarrow\quad 0 < h_n \leq \frac{x-1}{n},$$

da cui segue $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$ e quindi otteniamo la conclusione nel caso $x > 1$.

Se $x = 1$ la successione è costante ed il risultato banale. Se $x < 1$, allora $1/x > 1$ e quindi $\sqrt[n]{1/x}$ converge ad 1 per quanto già visto. Dato che $\sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{1/x}}$, segue la conclusione.

Esempio 3.2.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0.$$

In questo caso $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ è la differenza di termini che tendono a $+\infty$. Passare al limite separatamente sui due termini dà l'espressione $+\infty - \infty$, che è *senza senso*.[3] Ci troviamo di fronte ad una forma indeterminata e quindi per determinare l'esistenza o meno del limite bisogna lavorare un po' d'astuzia. Qui possiamo riscrivere a_n come

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

che tende a 0 per $n \to +\infty$.

Esempio 3.3. (Molto importante!)

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & x \in (-1,1),\\ 1 & x = 1,\\ \text{non esiste} & x = -1,\\ +\infty & x > 1,\\ \text{diverge in modulo} & x < -1.\end{cases}$$

[3] In generale si pone la questione: si possono dare delle "regole algebriche" per l'uso dei simboli $\pm\infty$? Occorre ricordarsi che questi simboli sono definiti dall'operazione di limite e quindi, per definire tali regole, bisogna ricondursi alle proprietà dei limiti.

Abbiamo già visto che $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ per $x \in (0,1)$ e che $\lim_{n\to+\infty} x^n = +\infty$ per $x > 1$ Anche per $x \in (-1,0]$, la successione x^n è infinitesima, dato che $\lim_{n\to+\infty} |x|^n = 0$.

Se $x = 1$ la successione è costantemente 1 (che quindi è il suo limite). Se $x = -1$, la successione oscilla tra i valori ± 1 ed è non regolare. Nel caso $x < -1$, la successione oscilla tra valori positivi e negativi e non è regolare, ma in valore assoluto diverge.

Esempio 3.4.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{x^n} = 0. \qquad \forall\, x > 1,\, p \in \mathbb{N}.$$
Per dimostrare questo limite, applichiamo il Corollario 2.6 ad $a_n = \frac{n^p}{x^n}$:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^p}{x^{n+1}}\frac{x^n}{n^p} = \frac{(n+1)^p}{xn^p} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \longrightarrow \frac{1}{x} \in (0,1) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$
Dato che il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tende ad un numero in $[0,1)$, sono verificate le ipotesi del Corollario e quindi vale la conclusione.

Esempio 3.5.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \forall\, x > 1. \tag{16}$$
Applichiamo di nuovo il Corollario 2.6
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0 \qquad \text{per } n \to +\infty,$$
da cui segue la conclusione.

Esempio 3.6.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$
Infatti
$$0 \le a_n = \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n\cdot n\cdots n} = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{n} = 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\frac{1}{n} \le \frac{1}{n},$$
quindi, per il Teorema 2.3, vale la conclusione.

Esempio 3.7. **La serie geometrica.** Fissato $q \in \mathbb{R}$, la successione
$$S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k,$$
è convergente se e solo se $q \in (-1,1)$. Inoltre
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q} \qquad \forall\, q \in (-1,1).$$

Infatti, la successione S_n si può riscrivere nella forma

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & q \neq 1, \\ \\ n + 1 & q = 1 \end{cases}$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ è utilizzando i risultati dell'Esempio 3.3 si ottiene la conclusione. Nel caso $q \geq 1$ la successione diverge, mentre per $q \leq -1$ la serie è non regolare. Per esprimere la convergenza di S_n a $1/(1-q)$ per $|q| < 1$, si usa la notazione

$$\text{serie geometrica :} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} q^n := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \forall\, q \in (-1, 1).$$

Sul significato della parola "serie" in generale torneremo tra poco.

4. Successioni monotòne

Definizione 4.1. <u>Successioni monotòne.</u> *Una successione a_n è* strettamente crescente *se ogni termine è maggiore del precedente, cioè se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, è* strettamente decrescente *se $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Una successione a_n è* strettamente monotòna *se è o strettamente crescente o strettamente decrescente.*

Nel caso in cui valgano le disuguaglianze non strette valgono delle definizioni analoghe: a_n è non decrescente se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni n ed è non crescente se $a_n \geq a_{n+1}$. Una successione a_n è monotòna se è o non decrescente o non crescente.

Per verificare se una successione è monotona occorre risolvere delle disequazioni. Ad esempio, la successione $a_n = \dfrac{1}{1+n^2}$ è strettamente decrescente, infatti

$$a_{n+1} < a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{1+(n+1)^2} < \frac{1}{1+n^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 + n^2 < 1 + (n+1)^2$$

che è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4.2. *Dire se la successione $a_n = \frac{n}{1+n^2}$ è strettamente decrescente.*

Esercizio 4.3. *Siano a_n e b_n due successioni postive e non decrescenti. Dimostrare che $a_n + b_n$ e $a_n b_n$ sono anch'esse successioni non decrescenti. E' ancora vera la conclusione se si rimuove l'ipotesi di positività?*

Se una successione è monotóna, allora è preclusa la possibilità che abbia delle oscillazioni: i termini o salgono sempre o scendono sempre, non possono fare "un po' su e un po' giù". In termini di esistenza/non esistenza del limite questa proprietà semplifica molto la casistica.

Teorema 4.4. Regolarità delle successioni monotòne. *Una successione a_n monotòna è sempre regolare (cioè o è convergente o è divergente) e*

$$a_n \text{ non decrescente} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n,$$

$$a_n \text{ non crescente} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Se a_n è anche limitata, allora è convergente.

Dimostrazione. Supponiamo a_n non decrescente e superiormente limitata,

$$a_n \le a_m \le \ell := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < +\infty, \qquad n \le m.$$

Per dimostrare che tale successione converge ad ℓ bisogna mostrare che comunque scelto $\varepsilon > 0$ è possibile scegliere $N \in \mathbb{N}$ per cui si ha $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ per ogni $n > N$. La seconda delle due disequazioni è sempre verificata per definizione di ℓ (è un maggiorante). Inoltre, dato che ℓ è il più piccolo dei maggioranti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste certamente un indice N tale che $\ell - \varepsilon < a_N$ (altrimenti $\ell - \varepsilon$ sarebbe un maggiorante e, quindi, ℓ non sarebbe il piú piccolo!). Usando la monotonia si ha

$$\ell - \varepsilon < a_N \le a_n < \ell \qquad \forall n \ge N,$$

cioè la conclusione.

I casi rimanenti si dimostrano in maniera simile. □

Esercizio 4.5. *Sia a_n una successione non decrescente. Dimostrare che:*
(i) se da a_n si può estrarre una sottosuccessione a_{n_k} convergente, allora a_n è convergente;
(ii) se da a_n si può estrarre una sottosuccessione a_{n_k} divergente, allora a_n diverge.

5. Serie numeriche

In generale, una serie numerica è definita da una successione a_n, con la richiesta di sommare i termini nell'ordine dato dall'indice n. In parole povere, si tratta di dare senso alla *somma di un numero infinito di termini.* Il procedimento più naturale (utilizzato nell'Esempio 3.7) è di considerare la successione S_n delle somme parziali

$$S_0 := a_0, \quad S_1 := a_0 + a_1, \quad \dots, \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

cioè la successione il cui termine $n-$esimo è la somma dei primi $n+1$ termini $a_0, \dots, a_n$. Se la successione delle somme parziali S_n è convergente, la serie si dice semplicemente convergente. La somma della serie, che si indica con $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, è definita da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} S_n,$$

nel caso in cui tale limite esista. Si usa la stessa terminologia delle successioni: una serie è convergente/divergente/regolare/non regolare se la successione delle somme parziali è convergente/divergente/regolare/non regolare.

Grazie alla linearità del limite di successioni, anche le serie godono della proprietà di linearità: combinazioni lineari di serie convergenti danno luogo a serie convergenti.

Teorema 5.1. Linearità delle serie. *Siano a_k e b_k i termini generici di due serie convergenti. Allora, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la serie di termine generico $\lambda a_k + \mu b_k$ è convergente e vale la formula*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

In generale non è facile stabilire se una serie sia o non sia convergente. Un primo ingrediente utile per questo studio è il seguente: *se una serie è convergente, allora il suo termine generico deve essere infinitesimo*:

$$\textbf{condizione necessaria di convergenza}: \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{convergente} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Infatti, sia $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ convergente, cioè esista finito $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$. Dato che $a_n = S_n - S_{n-1}$ e, per ipotesi, la successione S_n converge a S per $n \to +\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Questa condizione necessaria rispecchia il fatto, suggerito dall'intuizione, secondo cui occorre sommare termini che tendono a zero per sperare che la somma di un numero infinito di termini dia un valore finito. E' importante notare che esistono serie il cui termine generico a_n è infinitesimo, ma che non sono convergenti. Ad esempio, possiamo considerare la serie definita dalla successione seguente: il primo termine vale 1, i due termini successivi valgono $\frac{1}{2}$, i tre termini successivi valgono $\frac{1}{3}$ e così via:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \dots$$

E' chiaro che la successione è infinitesima, ma le corrispondenti somme ridotte verificano:

$$S_0 = 1,\ S_3 = 2,\ S_6 = 3,\ S_{10} = 4,\ S_{15} = 5,\ \dots$$

e quindi danno luogo ad una successione divergente.

Criteri di confronto per serie a termini positivi. Stabilire la convergenza o meno di una serie è più facile se la successione a_k è costituita da termini non negativi. Infatti, dato che $a_k \geq 0$, si ha $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$, cioè $S_n \leq S_{n+1}$ per ogni n. Quindi la successione S_n è non decrescente e pertanto regolare: o converge o diverge,

$$a_k \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty.$$

Dato che una serie a termini positivi può solo convergere o divergere a $+\infty$, condizione sufficiente di convergenza è che esista una serie maggiorante b_k convergente.

TEOREMA 5.2. Criterio di confronto per serie. *Sia $a_k \geq 0$ per ogni k.*
(i) Se esiste b_k tali che $0 \leq a_k \leq b_k$ per ogni k, allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$$

(ii) se esiste $b_k \geq 0$ tali che $a_k \geq b_k$ per ogni k, allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty.$$

OSSERVAZIONE 5.3. Se in (i) e in (ii) la richiesta di stima con i termini b_k è soddisfatta definitivamente, cioè per ogni $k \geq \bar{N}$ per un opportuno $\bar{N}$, anziché per ogni $k \in \mathbb{N}$, la conclusione vale lo stesso, dato che *le proprietà di convergenza non cambiano quando si cambiano un numero finito di termini.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo solo la parte (i) lasciando la (ii) come esercizio. La successione delle somme parziali di a_n è non decrescente, quindi per dimostrarne la convergenza, è sufficiente mostrarne la limitatezza (grazie al Teorema 4.4). Dalle maggiorazioni

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k < +\infty,$$

segue la conclusione. □

ESEMPIO 5.4. Consideriamo la serie (a termini non negativi)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n + n}.$$

Euristicamente, è ragionevole aspettarsi che, per valori di n grandi il termine generico $\frac{2^n-1}{3^n+n}$ si possa approssimare come segue

$$\frac{2^n - 1}{3^n + n} \approx \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

quindi il sospetto è che sia convergente, vista la somiglianza con la serie geometrica. Poniamoci quindi l'obiettivo di stimarla dall'alto
$$\frac{2^n-1}{3^n+n} \le \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
Dato che il termine generico della serie è minore di quello della serie geometrica di ragione $\frac{2}{3}$, la serie è convergente.

OSSERVAZIONE 5.5. Una maniera facile per determinare una stima del tipo $a_k \le Cb_k$ per k sufficientemente grande è tramite il limite del rapporto a_k/b_k. Supponiamo, ad esempio, di sapere che
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \ge 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty,$$
Per definizione di limite, scelto $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ opportuno per cui, per ogni $n \ge N$,
$$\ell - \varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < \ell + \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad a_k < (\ell+\varepsilon)b_k.$$
Quindi, applicando il precedente risultato, si dimostra che la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente.

ESEMPIO 5.6. Fissato $x \ge 0$, studiamo la serie esponenziale
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$
Sappiamo già che il termine generico di questa serie è infinitesimo. Purtroppo questo non basta a stabilire la convergenza della serie. L'impressione è che, dato che il fattoriale cresce più rapidamente di qualsiasi esponenziale (vedi Esempio 3.5), il termine generico vada a zero molto rapidamente tanto da far convergere la serie. Scegliamo, allora, come serie b_k di confronto quella di termine generico $b_k = y^k$ con $y \in (0,1)$. Dato che, per (16),
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x^k/k!}{y^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(x/y)^k}{k!} = 0,$$
effettivamente, per k sufficientemente grande vale la stima $x^k/k! \le y^k$ che mostra che la serie esponenziale è convergente per ogni scelta di $x > 0$.

Serie numeriche a segno qualsiasi. Come si è detto, verificare la convergenza semplice di una serie può essere molto complicato. Ben diverso è se la serie è a termini positivi, dato che in questo caso la successione delle somme parziali è non decrescente. Per questo motivo, per serie numeriche con termini a segno qualsiasi si introduce un nuovo tipo di convergenza che è più restrittivo di quella semplice, ma che è più facile da verificare, dato che richiede la verifica della convergenza di una serie a termini positivi.

Definizione 5.7. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente *se è convergente la serie dei valori assoluti, cioè se* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *è convergente.*

Nel caso in cui la serie sia a termini non negativi, cioè $a_n \geq 0$ per ogni n, la convergenza assoluta è equivalente alla convergenza semplice. In generale vale l'implicazione (mentre l'implicazione opposta è falsa!)

$$\text{convergenza assoluta} \qquad \Rightarrow \qquad \text{convergenza semplice}$$

Per dimostrarla, introduciamo due nuovi oggetti. Dato $a \in \mathbb{R}$, la parte positiva a^+ e la parte negativa a^- di a sono definite da

$$a^+ = \max(a, 0) \quad , \quad a^- = \max(-a, 0).$$

Quindi, se $a = 2$, $a^+ = 2$ e $a^- = 0$, mentre se $a = -3$, $a^+ = 0$ e $a^- = 3$. Dalla definizione discendono le proprietà seguenti:

$$0 \leq a^+ \leq |a|, \qquad 0 \leq a^- \leq |a|, \qquad a = a^+ - a^-, \qquad |a| = a^+ + a^-.$$

Esercizio 5.8. *Disegnare il grafico delle funzioni parte positiva* $f(x) = x^+$ *e parte negativa* $g(x) = x^-$.

Se a_k è il termine generico di una serie, consideriamo le altre due serie di termine generico a_k^+ e a_k^-. Ad esempio, se $a_k = (-1)^k/(k+1)$,

$$\begin{array}{llllllll}
a_k & : & 1, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & -\frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & -\frac{1}{6}, \ldots \\
a_k^+ & : & 1, & 0, & \frac{1}{3}, & 0, & \frac{1}{5}, & 0, \ldots \\
a_k^- & : & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{4}, & 0, & \frac{1}{6}, \ldots.
\end{array}$$

Che collegamento c'è tra la convergenza assoluta e la convergenza della serie delle parti positive e delle parti negative? Semplice... si tratta della stessa cosa!

Proposizione 5.9. *Una serie di termine generico* a_k *converge assolutamente se e solo se convergono (semplicemente) le serie di termine generico* a_k^+ *e* a_k^-.

Dimostrazione. Supponiamo che la serie $\sum a_k$ sia assolutamente convergente. Allora è possibile applicale il criterio di confronto per serie a termini positivi (Teorema 5.2): dato che $0 \leq a_k^{\pm} \leq |a_k|$ e la serie $\sum |a_k|$ è convergente, anche le serie $\sum a_k^+$ e $\sum a_k^-$ sono convergenti.

Viceversa, supponiamo che le serie $\sum a_k^+$ e $\sum a_k^-$ siano convergenti, allora per la linearità delle serie (Teorema 5.1) anche la loro somma è convergente. Dato che la loro somma è proprio la serie dei valori assoluti. □

Da questa caratterizzazione della convergenza assoluta, discende rapidamente il risultato seguente.

Teorema 5.10. *Sia a_k il termine generico di un serie. Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, allora converge anche semplicemente.*

Dimostrazione. Se la serie converge assolutamente, allora le serie $\sum a_k^+$ e $\sum a_k^-$ sono convergenti, quindi per il Teorema 5.1 anche la loro differenza è convergente: ma $a_k = a_k^+ - a_k^-$ e quindi la conclusione è a portata di mano. Allungatevi. □

Se una serie converge assolutamente, allora vale la seguente versione (per somme infinite) della disuguaglianza triangolare:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

La dimostrazione (facile) è lasciata per esercizio.

Esempio 5.11. Fissato $x \in \mathbb{R}$, consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{2^k}.$$

Questa serie è assolutamente convergente per ogni scelta di $x \in \mathbb{R}$. Infatti

$$\left|\frac{\sin(kx)}{2^k}\right| = \frac{|\sin(kx)|}{2^k} \leq \frac{1}{2^k},$$

e la serie $\sum \frac{1}{2^k}$ è convergente perché è la serie geometrica con ragione $\frac{1}{2}$. Quindi la serie $\sum \frac{\sin(kx)}{2^k}$ converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

La serie esponenziale. Dato $x \in \mathbb{R}$, considerariamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo già visto che la serie è convergente per $x \geq 0$. Cosa succede per i valori di $x < 0$? Facile, basta ricorrere alla convergenza assoluta! Dato che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{x^k}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$$

è convergente perché $|x| \geq 0$, la serie assegnata converge assolutamente e quindi converge anche semplicemente. Si definisce

$$\text{funzione esponenziale:} \qquad e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Questa posizione è del tutto rigorosa dato che la serie è sempre convergente. A rigore, bisognerebbe verificare che questa definizione sia compatibile con la costruzione naïf e con le proprietà viste in precedenza per le funzioni esponenziali, ma non ci soffermeremo su tale aspetto.

Approssimazione del numero di Nepero. A partire dalla formula

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

è possibile ottenere approssimazioni del valore di e. Prima di tutto stimiamo l'errore che si commette sostituendo il numero e con la somma parziale $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, cioè la differenza $e - s_n$

$$\begin{aligned} 0 < e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\,n}, \end{aligned}$$

quindi vale

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| \le \frac{1}{n!\,n}.$$

Da questa stima si può determinare il numero di elementi che occorre sommare per ottenere una approssimazione di e con errore prescritto. Ad esempio, supponiamo di ammettere un errore massimo di 10^{-4}. Dato che

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!\,n$	1	4	18	96	600	4320	35280
$1/(n!\,n)$	1	$0,25$	$0,0\bar{5}$	$0,010412$	$0,001\bar{6}$	$0,000231$	$0,000028$

va bene scegliere $n = 7$. Quindi l'approssimazione richiesta è

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = 2,718254.$$

La serie armonica e la serie armonica generalizzata. Una delle serie numeriche più famose è quella di termine generico $\dfrac{1}{n}$, che è detta serie armonica. Questa serie è divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \tag{18}$$

Infatti, sia $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ e consideriamo la sottosuccessione S_{2^k} di S_n. Allora si ha

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right), \ldots$$

e così via. Manteniamo i termini S_1 e S_2 così come sono e preoccupiamoci dei successivi. Il termine S_4 può essere stimato dal basso:

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}.$$

Analogamente, vale

$$\begin{aligned} S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) = S_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &\geq S_4 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = S_4 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

In generale, consideriamo il termine $S_{2^{k+1}}$:

$$\begin{aligned} S_{2^{k+1}} &= S_{2^k} + \left(\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \\ &\geq S_{2^k} + \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}\right) = S_{2^k} + \frac{2^k}{2^{k+1}} = S_{2^k} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

dato che i termini in parentesi sono $2^{k+1} - 2^k = 2^k$. Quindi, ogni volta che l'indice k della sottosuccessione S_{2^k} aumenta di 1, la stima dal basso aumenta di $1/2$. Dato che $S_{2^0} = 1$, se ne deduce che

$$S_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{k+1}{2},$$

da cui segue che la sottosuccessione S_{2^k} è divergente. Dato che S_n è crescente ed ammette una sottosuccessione divergente, essa stessa è divergente.

In generale, la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \alpha > 0,$$

è convergente se e solo se $\alpha > 1$.

La divergenza nel caso $\alpha \in (0,1)$ segue da $n^\alpha < n$ per ogni n (dimostrare!), che implica:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Nel caso $\alpha > 1$ tale serie è convergente. Dato che si tratta di una "somma" di termini positivi, la successione delle somme parziali è monotona crescente. Per la proprietà delle successioni monotone (Teorema 4.4), per dimostrarne la convergenza, basta verificare che la serie non diverga a $+\infty$. Perciò, con astuzia, consideriamo gli insiemi $I_k = \{n \in \mathbb{N} : 2^k \leq n < 2^{k+1}\}$, notando che $\mathbb{N} = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$. L'insieme I_k ha $2^{k+1} - 2^k = 2^k(2-1) = 2^k$ termini e, se $n \in I_k$, vale la maggiorazione $1/n^\alpha \leq 1/2^{\alpha k}$. Stimiamo la somma dei termini $1/n^\alpha$ per $n \in I_k$:

$$\sum_{n \in I_k} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n \in I_k} \frac{1}{2^{\alpha k}} = 2^k \cdot \frac{1}{2^{\alpha k}} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k.$$

Quindi, notando che $\frac{1}{2^{\alpha-1}} \in (-1, 1)$ per $\alpha > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n \in I_k} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k < +\infty$$

grazie alla convergenza della serie geometrica.